Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 3
29. April 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 7. Mai 2014, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir verknüpfen Hausaufgabe 4 und Tutoraufgabe 2 von Blatt 1 wie folgt.
Sei Ω_1 die Menge aller Paare von Farbmerkmalen aus $\{w, s, r\}$, d.h., $\Omega_1 = \{(x, y)\,;\, x, y \in \{w, s, r\}\}$. Dann lassen sich die Ergebnisse (Elementarereignisse) der in HA 4 von Blatt 1 beschriebenen zufälligen Ziehung durch Ω_1 beschreiben.

1. Bestimmen Sie den HA 4 zugrunde liegenden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \Pr)$! Zeigen Sie, dass keine Laplace-Verteilung vorliegt.

2. Seien E_1 bzw. E_2 das Ereignis, dass beim ersten bzw. zweiten Zug ein schwarzen Ball gezogen wird. Sind E_1 und E_2 unabhängig? Beweis!

3. Die Ziehung in HA 4 lässt sich nach TA 2 durch einen Laplace-verteilten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \Pr)$ beschreiben, so dass die Elementarereignisse $x \in \Omega_1$ eineindeutig gewissen Ereignissen $E \subseteq \Omega_2$ mit $\Pr(x) = \Pr[E]$ entsprechen.

   Bestimmen Sie Ω_2 und definieren Sie eine Abbildung $X : \Omega_2 \to \Omega_1$ so dass $\Pr(x) = \Pr[X = x]$ gilt.

Bemerkung: HA 4 ist Spezialfall eines Aufgabentypus, in dem die Auswahl von Elementen verschiedener Sorten betrachtet werden. In Übungsblatt 4 wird dieser Aufgabentypus zu hypergeometrischen bzw. poly-hypergeometrischen Verteilungen führen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $W = (\Omega, \Pr)$ mit $\Omega = [1, 60] \subseteq \mathbb{N}$, so dass alle Ergebnisse aus Ω gleichwahrscheinlich sind. Seien X_1 und X_2 Indikatorvariablen über W, deren Verteilung durch die folgenden Ereignisse gegeben ist:

$$A := X_1^{-1}(1) = [1, 15] \quad \text{und} \quad B := X_2^{-1}(1) = [13, 24]\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind.

2. Geben Sie eine Indikatorvariable X_3 mit $\Pr[X_3 = 1] = \frac{1}{3}$ an, so dass die Variablen X_1, X_2, X_3 unabhängig sind.

Hinweis: $[1, n] = \{i \in \mathbb{N}\,;\, 1 \le i \le n\}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $W = (\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse E bezeichnen wir $\Omega \setminus E$ mit $\overline{E}$.

1. Wir beobachten Ereignisse A und B und wissen, dass A mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[A] = \frac{1}{10}$ eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A bzw. $\overline{A}$ eingetreten ist, sei $\Pr[B|A] = \frac{5}{9}$ bzw. $\Pr[B|\overline{A}] = \frac{1}{9}$.

   Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt, als Bruchzahl!

2. Seien C und X Ereignisse aus W mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[C|X] = \frac{2}{9}$, $\Pr[X|C] = \frac{1}{10}$ und $\Pr[C|\overline{X}] = \frac{2}{3}$.

   Berechnen Sie $\Pr[X]$.

3. Sei $W = (\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\Pr[\omega] \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Kann es in W zwei verschiedene, unabhängige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ geben, für die $|A| = |B| = 2$ gilt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir gehen aus von einem Zufallsexperiment mit Ereignissen aus einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$, bei dessen Ausführung stets mindestens eines von 3 bestimmten Ereignissen $A, B, C \subseteq \Omega$ eintritt. A und B seien unabhängige Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$. Es sei C disjunkt zu A und B.

1. Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$ und $\Pr[C]$!

2. Geben Sie ein konkretes Beispiel für $(\Omega, \Pr)$ an.

Zusatzaufgabe 1 (wird nicht korrigiert)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:
Paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

$Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide `O` gezogen wurden.

Vorbereitung 2

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]\,.$$
2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y)\cdot(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Vorbereitung 3

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1,\ldots,6$ einmal vorgekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Vorbereitung 4

Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Man beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \quad = \quad & 1 - \sum_{1\le i_1\le n} x_{i_1} \\
& + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} x_{i_1}\cdot x_{i_2} \\
& \vdots \\
& + (-1)^l \cdot \sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_l} \\
& \vdots \\
& + (-1)^n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\,.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Sei T eine nicht leere Menge von n Tieren. T bestehe aus genau a Ochsen und b Eseln, so dass also $a + b = n$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von $r \neq 0$ ausgewählten Tieren genau x Tiere Ochsen sind, ist gegeben durch

$$\Pr[x] = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x}}{\binom{n}{r}} .$$

Sei nun $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, r\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Tutoraufgabe 2

Sei $W = (\Omega_n, \Pr)$ mit $\Omega_n = \{a, b, c\}^n$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b bzw. c in der i-ten Komponente von $w \in \Omega_n$ auftritt jeweils $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$ seien.
Wir betrachten die Zufallsvariablen $X_a, X_b, X_c : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, die einem Wort w entsprechend die Anzahl der enthaltenen a bzw. b bzw. c zuordnen.

1. Sind X_a, X_b, X_c unabhängig? Begründung!
2. Geben Sie die gemeinsame Dichte der Variablen X_a und X_b an!
   Geben Sie die entsprechenden Randdichten von X_a und X_b an!
3. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_c.

Tutoraufgabe 3

In einem Schützenverein haben Anfänger beim Tontaubenschießen nur eine Trefferquote von 10%.

1. Seien $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Anfänger bei k Schüssen genau i Treffer?
2. Wir wollen die Leistung von 100 Anfängern mit Noten bewerten. Note 2 bedeutet, dass der Schütze bei 2 Schüssen genau 1 Treffer erzielt. Nun lassen wir jeden der 100 Schützen (je) 2 Schussversuche machen und bezeichnen mit X die Anzahl der Schützen, die die Note 2 erhalten.

   Geben Sie die Dichtefunktion der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an! Berechnen Sie den Erwartungswert von X!

Tutoraufgabe 4

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ kaputt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage lang hintereinander störungsfrei arbeitet?
2. Wie groß ist die erwartete Anzahl k von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen einer Maschine, unter der Annahme, dass die Maschine am Tag $k + 1$ defekt ist?