Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil 2

Dennis Kraft   Richard Stotz

16. Juli 2015

Wichtige Informationen

- **Rückgabe alter Hausaufgaben:** 27. Juli, 15 Uhr, Raum 03.11.018

Wichtige Informationen

- **Rückgabe alter Hausaufgaben:** 27. Juli, 15 Uhr, Raum 03.11.018

- **Termin:** 4. August 2015, 11:00-13:00 Uhr
  $\rightarrow$ Mindestens 15 Minuten vorher vor Ort sein!
- **Hilfsmittel:** Ein (doppelseitig) handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- **Sitzplätze:** Werden 3 Tage im Voraus auf der Übungswebsite verkündet

Wichtige Informationen

- **Rückgabe alter Hausaufgaben:** 27. Juli, 15 Uhr, Raum 03.11.018

- **Termin:** 4. August 2015, 11:00-13:00 Uhr
  $\rightarrow$ Mindestens 15 Minuten vorher vor Ort sein!
- **Hilfsmittel:** Ein (doppelseitig) handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- **Sitzplätze:** Werden 3 Tage im Voraus auf der Übungswebsite verkündet

- Einsicht Ende August / Anfang September (siehe Übungswebsite)
- Wiederholungsklausur 30. September 11:00 - 13:00 Uhr
  $\rightarrow$ Separate Anmeldungung in TUMOnline

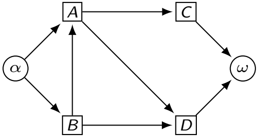
Über diese Zentralübung

Inhalt:

- Wir besprechen beispielhaft die DWT-Klausur Sommer 2012
- **Unsere Klausur kann sich (stark) in Struktur und Themenschwerpunkt unterscheiden!**
- Wir möchten einen Eindruck vermitteln, wie eine Klausuraufgabe aussehen kann - mehr nicht!

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten

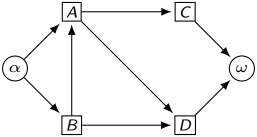
Betrachte folgendes System mit Signalweg von α zu ω:



- Lebenszeit jeder Komponente unabhängig Exp(1)-verteilt
  $\rightarrow$ „$A \leq t$"= Ereignis, dass A zum Zeitpunkt t defekt ist
- System funktioniert, falls es einen Weg von α nach ω mit funktionstütigen Komponenten gibt
  $\rightarrow \Delta(t) =$ Ereignis, dass das System zum Zeitpunkt t defekt ist.

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten

Betrachte folgendes System mit Signalweg von α zu ω:



- Lebenszeit jeder Komponente unabhängig Exp(1)-verteilt
  $\to$ „$A \leq t$"= Ereignis, dass A zum Zeitpunkt t defekt ist
- System funktioniert, falls es einen Weg von α nach ω mit funktionstütigen Komponenten gibt
  $\to \Delta(t) =$ Ereignis, dass das System zum Zeitpunkt t defekt ist.

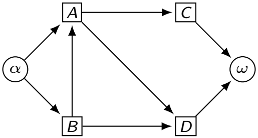
Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, unter der Bedingung, dass zum Zeitpunkt $t > 0$ die Komponente A defekt ist.

Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

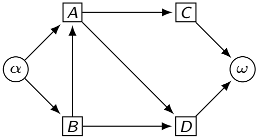
Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



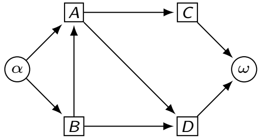
Lösung

Wir suchen $\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t]$.

Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



Lösung

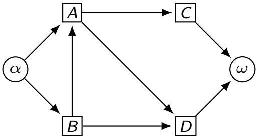
Wir suchen $\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t]$.

$$\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] = \Pr[\neg(B > t \wedge D > t) \mid A \leq t]$$

Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



Lösung

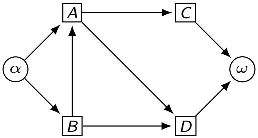
Wir suchen $\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t]$.

$$\begin{aligned}\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] &= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t) \mid A \leq t] \\ &= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t)]\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



Lösung

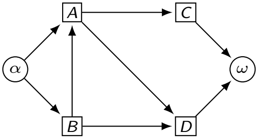
Wir suchen $\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t]$.

$$\begin{aligned}
\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] &= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t) \mid A \leq t] \\
&= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t)] \\
&= 1 - \Pr[B > t]\Pr[D > t]
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, falls zum Zeitpunkt $t > 0$ A defekt ist.



Lösung

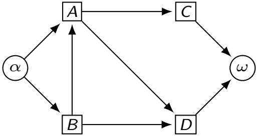
Wir suchen $\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t]$.

$$\begin{aligned}
\Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] &= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t) \mid A \leq t] \\
&= \Pr[\neg(B > t \wedge D > t)] \\
&= 1 - \Pr[B > t]\Pr[D > t] \\
&= 1 - e^{-2t}
\end{aligned}$$

Defekt des gesamten Systems

Aufgabe 1.2

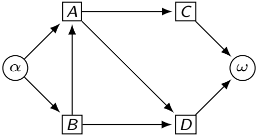
Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.



Defekt des gesamten Systems

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.



Lösung

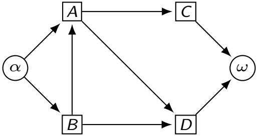
Wir suchen $\Pr[\Delta(t)]$.

$$\Pr[\Delta(t)] = \Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] \cdot \Pr[A \leq t] + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] \cdot \Pr[A > t]$$

Defekt des gesamten Systems

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.



Lösung

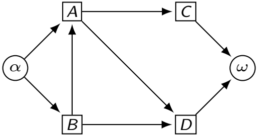
Wir suchen $\Pr[\Delta(t)]$.

$$\begin{aligned}\Pr[\Delta(t)] &= \Pr[\Delta(t) \mid A \le t] \cdot \Pr[A \le t] + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] \cdot \Pr[A > t] \\ &= (1 - e^{-2t})(1 - e^{-t}) + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] e^{-t}\end{aligned}$$

Defekt des gesamten Systems

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.



Lösung

Wir suchen $\Pr[\Delta(t)]$.

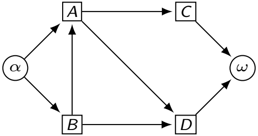
$$\begin{aligned}\Pr[\Delta(t)] &= \Pr[\Delta(t) \mid A \leq t] \cdot \Pr[A \leq t] + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] \cdot \Pr[A > t] \\ &= (1 - e^{-2t})(1 - e^{-t}) + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] e^{-t}\end{aligned}$$

Es gilt $\Pr[\Delta(t) \mid A > t] = \Pr[C \leq t] \cdot \Pr[D \leq t] = (1 - e^{-t})^2$

Defekt des gesamten Systems

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.



Lösung

Wir suchen $\Pr[\Delta(t)]$.

$$\begin{aligned}\Pr[\Delta(t)] &= \Pr[\Delta(t) \mid A \le t] \cdot \Pr[A \le t] + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] \cdot \Pr[A > t] \\ &= (1 - e^{-2t})(1 - e^{-t}) + \Pr[\Delta(t) \mid A > t] e^{-t}\end{aligned}$$

Es gilt $\Pr[\Delta(t) \mid A > t] = \Pr[C \le t] \cdot \Pr[D \le t] = (1 - e^{-t})^2$
Damit folgt

$$\Pr[\Delta(t)] = (1 - e^{-2t})(1 - e^{-t}) + (1 - e^{-2t})^2 e^{-t} = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Würfeln mit Andrey Markov

Sie werfen einen fairen Würfel, von dessen sechs Seiten je zwei mit a bzw. b bzw. c beschriftet sind, bis Sie das erste Mal die Situation beobachten, dass alle drei Zeichen hintereinander auftreten.

Aufgabe 2

1. Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe einer Markov-Kette mit genau den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Der Zustand $i \in S$ sollte dabei bedeuten, dass die Ergebnisse der letzten i Würfe alle verschieden waren.
2. Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Modellierung des Problems

Aufgabe 2.1

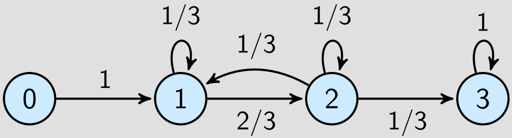
Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe einer Markov-Kette mit genau den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Der Zustand $i \in S$ sollte dabei bedeuten, dass die Ergebnisse der letzten i Würfe alle verschieden waren.

Modellierung des Problems

Aufgabe 2.1

Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe einer Markov-Kette mit genau den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Der Zustand $i \in S$ sollte dabei bedeuten, dass die Ergebnisse der letzten i Würfe alle verschieden waren.

Lösung



Rechnen auf der Markov-Kette

Aufgabe 2.2

Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Rechnen auf der Markov-Kette

Aufgabe 2.2

Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Lösung

Wir suchen $\mathbb{E}[T_{0.3}]$.

Rechnen auf der Markov-Kette

Aufgabe 2.2

Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Lösung

Wir suchen $\mathbb{E}[T_{0.3}]$.
Wir erhalten (Regel der VL) folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbb{E}[T_{0,3}] = 1 + \mathbb{E}[T_{1,3}] \tag{1}$$

$$\mathbb{E}[T_{1,3}] = 1 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{2}{3}\,\mathbb{E}[T_{2,3}] \tag{2}$$

$$\mathbb{E}[T_{2,3}] = 1 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{2,3}] \tag{3}$$

Rechnen auf der Markov-Kette

Aufgabe 2.2

Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Lösung

Wir suchen $\mathbb{E}[T_{0.3}]$.
Wir erhalten (Regel der VL) folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbb{E}[T_{0,3}] = 1 + \mathbb{E}[T_{1,3}] \tag{1}$$

$$\mathbb{E}[T_{1,3}] = 1 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{2}{3}\,\mathbb{E}[T_{2,3}] \tag{2}$$

$$\mathbb{E}[T_{2,3}] = 1 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}[T_{2,3}] \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) folgt $\mathbb{E}[T_{2,3}] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[T_{1,3}]$ und durch Einsetzen die Lösung $\mathbb{E}[T_{0,3}] = 7$

Aufgabe 3

Es seien X_1 bis X_n unabhängige Stichprobenvariablen einer exponentialverteilten Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda = 1$. Außerdem sei $Y_i = X_i + \theta$, wobei θ ein unbekannter Parameter größer 0 ist.

Aufgabe 3.1

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ in Abhängigkeit der Stichprobenvariablen Y_1 bis Y_n.

Aufgabe 3

Seien y_1 bis y_n die konkreten Stichproben, die wir ziehen.

Aufgabe 3

Seien y_1 bis y_n die konkreten Stichproben, die wir ziehen.

- Die Likelihood-Funktion für θ ist somit gegeben druch

$$L(y_1, \ldots, y_n; \theta) = f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

Aufgabe 3

Seien y_1 bis y_n die konkreten Stichproben, die wir ziehen.

- Die Likelihood-Funktion für θ ist somit gegeben druch

$$L(y_1, \ldots, y_n; \theta) = f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

- Nachdem die Stichprobenvariablen X_i unabhängig und identisch verteilt sind, sind auch alle Y_i unabhängig und identisch verteilt. Es gilt also

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i).$$

Aufgabe 3

Wir sind nun daran interessiert $f_{Y_i}(y_i)$ zu bestimmen.

Aufgabe 3

Wir sind nun daran interessiert $f_{Y_i}(y_i)$ zu bestimmen.

- Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_{Y_i}(y_i) = \Pr[Y_i \leq y_i] = \Pr[X_i + \theta \leq y_i] = \Pr[X_i \leq y_i - \theta] = F_{X_i}(y_i - \theta).$$

Aufgabe 3

Wir sind nun daran interessiert $f_{Y_i}(y_i)$ zu bestimmen.

- Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_{Y_i}(y_i) = \Pr[Y_i \leq y_i] = \Pr[X_i + \theta \leq y_i] = \Pr[X_i \leq y_i - \theta] = F_{X_i}(y_i - \theta).$$

- Leiten wir nach y_i ab folgt

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_i} F_{Y_i}(y_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_i} F_{X_i}(y_i - \theta) = f_{X_i}(y_i - \theta) \cdot 1.$$

Aufgabe 3

Wir sind nun daran interessiert $f_{Y_i}(y_i)$ zu bestimmen.

- Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_{Y_i}(y_i) = \Pr[Y_i \leq y_i] = \Pr[X_i + \theta \leq y_i] = \Pr[X_i \leq y_i - \theta] = F_{X_i}(y_i - \theta).$$

- Leiten wir nach y_i ab folgt

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_i} F_{Y_i}(y_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_i} F_{X_i}(y_i - \theta) = f_{X_i}(y_i - \theta) \cdot 1.$$

- Da X_i exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = 1$ gilt

$$f_{Y_i}(y_i) = f_{X_i}(y_i - \theta) = \begin{cases} e^{-(y_i - \theta)} & \text{falls } y_i \geq \theta \\ 0 & \text{falls } y_i < \theta \end{cases}.$$

Aufgabe 3

Wir möchten nun die Likelihoodfunktion für θ maximieren.

Aufgabe 3

Wir möchten nun die Likelihoodfunktion für θ maximieren.

- Existiert ein y_i dass kleiner als θ ist, so gilt

$$L(y_1, \ldots, y_n; \theta) = f_{Y_i}(y_i) \cdot \prod_{i \neq j} f_{Y_i}(y_j) = 0 \cdot \prod_{i \neq j} f_{Y_i}(y_j) = 0.$$

Aufgabe 3

Wir möchten nun die Likelihoodfunktion für θ maximieren.

- Existiert ein y_i dass kleiner als θ ist, so gilt

$$L(y_1, \ldots, y_n; \theta) = f_{Y_i}(y_i) \cdot \prod_{i \neq j} f_{Y_i}(y_j) = 0 \cdot \prod_{i \neq j} f_{Y_i}(y_j) = 0.$$

- Sind andererseits alle y_i größer gleich θ, dann folgt

$$\begin{aligned} L(y_1, \ldots, y_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} e^{-(y_i - \theta)} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -(y_i - \theta)\right) \\ &= \exp\left(n\theta - \sum_{i=1}^{n} y_i\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

- Solange θ kleiner gleich dem kleinsten y_i ist, ist unsere Likelihoodfunktion also stetig und monoton wachsend bezüglich θ.

Aufgabe 3

- Solange θ kleiner gleich dem kleinsten y_i ist, ist unsere Likelihoodfunktion also stetig und monoton wachsend bezüglich θ.
- Außerdem ist die Likelihoodfunktion in diesem Fall echt größer als 0.
- Sobald θ größer als das kleinsten y_i ist, ist die Likelihoodfunktion gleich 0.

Aufgabe 3

- Solange θ kleiner gleich dem kleinsten y_i ist, ist unsere Likelihoodfunktion also stetig und monoton wachsend bezüglich θ.
- Außerdem ist die Likelihoodfunktion in diesem Fall echt größer als 0.
- Sobald θ größer als das kleinsten y_i ist, ist die Likelihoodfunktion gleich 0.
- Der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer ist somit

$$T = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Aufgabe 3

Es seien X_1 bis X_n unabhängige Stichprobenvariablen einer exponentialverteilten Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda = 1$. Außerdem sei $Y_i = X_i + \theta$, wobei θ ein unbekannter Parameter größer 0 ist.

Aufgabe 3.2

Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu für θ?

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ erwartungstreu, genau dann wenn $\mathbb{E}[T]$ gleich θ ist.

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ erwartungstreu, genau dann wenn $\mathbb{E}[T]$ gleich θ ist.

- Um den Erwartungswert von T zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\min\{\theta + X_1, \ldots, \theta + X_n\}] = \theta + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}].$$

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ erwartungstreu, genau dann wenn $\mathbb{E}[T]$ gleich θ ist.

- Um den Erwartungswert von T zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\min\{\theta + X_1, \ldots, \theta + X_n\}] = \theta + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}].$$

- Das Minimum über unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen Z_i mit den Parametern λ_i ist wiederum exponentialverteilt mit Parameter $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Die Zufallsvariable $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist also exponentialverteilt mit Parameter n.

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ erwartungstreu, genau dann wenn $\mathbb{E}[T]$ gleich θ ist.

- Um den Erwartungswert von T zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\min\{\theta + X_1, \dots, \theta + X_n\}] = \theta + \mathbb{E}[\min\{X_1, \dots, X_n\}].$$

- Das Minimum über unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen Z_i mit den Parametern λ_i ist wiederum exponentialverteilt mit Parameter $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Die Zufallsvariable $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ ist also exponentialverteilt mit Parameter n.
- Der Erwartungswert von $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ ist somit $\frac{1}{n}$ und Insgesammt gilt

$$\mathbb{E}[T] = \theta + \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ erwartungstreu, genau dann wenn $\mathbb{E}[T]$ gleich θ ist.

- Um den Erwartungswert von T zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\min\{\theta + X_1, \ldots, \theta + X_n\}] = \theta + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}].$$

- Das Minimum über unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen Z_i mit den Parametern λ_i ist wiederum exponentialverteilt mit Parameter $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Die Zufallsvariable $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist also exponentialverteilt mit Parameter n.
- Der Erwartungswert von $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist somit $\frac{1}{n}$ und Insgesammt gilt

$$\mathbb{E}[T] = \theta + \frac{1}{n}.$$

- Folglich ist T nicht erwartungstreu für θ.

Aufgabe 3

Es seien X_1 bis X_n unabhängige Stichprobenvariablen einer exponentialverteilten Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda = 1$. Außerdem sei $Y_i = X_i + \theta$, wobei θ ein unbekannter Parameter größer 0 ist.

Aufgabe 3.3

Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer konsistent im quadratischen Mittel für θ?

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ konsistent im quadratischen Mittel, genau dann wenn $\mathbb{E}[(T-\theta)^2]$ gleich 0 ist für $n \to \infty$.

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ konsistent im quadratischen Mittel, genau dann wenn $\mathbb{E}[(T-\theta)^2]$ gleich 0 ist für $n \to \infty$.

- Um den Erwartungswert von $(T-\theta)^2$ zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[(T-\theta)^2] = \mathbb{E}[(\theta + \min\{X_1, \dots, X_n\} - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\min\{X_1, \dots, X_n\})^2]$$

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ konsistent im quadratischen Mittel, genau dann wenn $\mathbb{E}[(T-\theta)^2]$ gleich 0 ist für $n \to \infty$.

- Um den Erwartungswert von $(T-\theta)^2$ zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[(T-\theta)^2] = \mathbb{E}[(\theta + \min\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2]$$

- Mit Hilfe des Satzes $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ formen wir weiter um zu

$$\mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2] = \mathrm{Var}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^2$$

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ konsistent im quadratischen Mittel, genau dann wenn $\mathbb{E}[(T-\theta)^2]$ gleich 0 ist für $n \to \infty$.

- Um den Erwartungswert von $(T-\theta)^2$ zu bestimmen rechnen wir

$$\mathbb{E}[(T-\theta)^2] = \mathbb{E}[(\theta + \min\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2]$$

- Mit Hilfe des Satzes $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ formen wir weiter um zu

$$\mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2] = \mathrm{Var}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^2$$

- Die Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariable Z mit Parameter λ ist gegeben durch $\frac{1}{\lambda^2}$ und somit gilt

$$\mathrm{Var}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Aufgabe 3

Der Maximum-Likelihood-Schätzer T ist für θ konsistent im quadratischen Mittel, genau dann wenn $\mathbb{E}[(T-\theta)^2]$ gleich 0 ist für $n \to \infty$.

- Um den Erwartungswert von $(T-\theta)^2$ zu bestimmen rechnen wir

  $$\mathbb{E}[(T-\theta)^2] = \mathbb{E}[(\theta + \min\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2]$$

- Mit Hilfe des Satzes $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ formen wir weiter um zu

  $$\mathbb{E}[(\min\{X_1, \ldots, X_n\})^2] = \text{Var}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^2$$

- Die Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariable Z mit Parameter λ ist gegeben durch $\frac{1}{\lambda^2}$ und somit gilt

  $$\text{Var}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

- Für $n \to \infty$ geht dieser Term gegen 0 und somit ist T konsistent im quadratischen Mittel bezüglich θ.

Aufgabe 4

Die Übungsleitung fragt sich, ob sie Klausur super einfach oder super schwer machen soll. Da beide Übungsleiter überzeugte Demokraten sind, soll die Klausur nur dann super schwer werden, wenn mindestens die Hälfte der Studenten das wünscht. Leider kann die Übungsleitung nicht alle Studenten einzeln befragen und macht daher eine Umfrage in der Zentralübung. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Binomialtests, ob sich mindestens die Hälfte der Studenten eine super schwere Klausur wünschen. Damit auch ja keine Fehler passieren setzen Sie das Signifikanzniveau auf 10^{-25}.

Aufgabe 4

- Sei X eine Indikatorvariable dafür, dass ein zufällig gewählter Student eine super schwere Klausur wünscht.

Aufgabe 4

- Sei X eine Indikatorvariable dafür, dass ein zufällig gewählter Student eine super schwere Klausur wünscht.
- Es gelte $\Pr[X = 1] = p$ und unsere Nullhypothese lautet demnach

$$p \geq \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4

Bestimmen wir nun unsere Testgröße

$$Z = \frac{h - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 4

Wer möchte eine super schwere Klausur?

Aufgabe 4

Ist Z kleiner als das 10^{-25}-Quantil der Standardnormalverteilung, so müssen wir die Hypothese ablehnen und eine schwere Klausur stellen. Das 10^{-25}-Quantil ist ungefähr

$$z_{10^{-25}} \approx -10,4205.$$

Viel Erfolg in der Klausur!