

Bei jeder Verteilung mit endlicher Varianz folgt  $MSE = \mathcal{O}(1/n)$  und somit  $MSE \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Der Schätzer  $\bar{X}$  ist also konsistent.

Aus der Konsistenz von  $\bar{X}$  im quadratischen Mittel können wir mit Hilfe des Satzes von Chebyshev (siehe Satz 61) folgende Konsequenz ableiten. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\Pr[|\bar{X} - \theta| \geq \varepsilon] = \Pr[|\bar{X} - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}]}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Für genügend große  $n$  liegen also die Werte von  $\bar{X}$  beliebig nahe am gesuchten Wert  $\theta = \mathbb{E}[X]$ . Diese Eigenschaft nennt man auch **schwache Konsistenz**, da sie aus der Konsistenz im quadratischen Mittel folgt.

Als nächstes betrachten wir eine weitere von  $\bar{X}$  abgeleitete Schätzvariable:

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Wir zeigen, dass  $S^2$  ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz von  $X$  ist. Sei  $\mu := \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[\bar{X}]$ .

$$\begin{aligned}(X_i - \bar{X})^2 &= (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (X_i - \mu)(X_j - \mu) \\ &= \frac{n-2}{n} (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j \neq i} (X_i - \mu)(X_j - \mu).\end{aligned}$$

Für je zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X_i, X_j$  mit  $i \neq j$  gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] &= \mathbb{E}[X_i - \mu] \cdot \mathbb{E}[X_j - \mu] \\ &= (\mathbb{E}[X_i] - \mu) \cdot (\mathbb{E}[X_j] - \mu) = 0 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] &= \frac{n-2}{n} \cdot \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] + \mathbb{E}[(\mu - \bar{X})^2] \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \text{Var}[X_i] + \text{Var}[\bar{X}].\end{aligned}$$

Wegen  $\text{Var}[X_i] = \text{Var}[X]$  und  $\text{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \text{Var}[X]$  folgt nun

$$\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X],$$

und somit gilt für  $S^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X]. \end{aligned}$$

$S^2$  ist also eine erwartungstreue Schätzvariable für die Varianz von  $X$ .

Die vorangegangene Rechnung erklärt, warum man als Schätzer nicht

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \neq S^2$$

verwendet, wie man vielleicht intuitiv erwarten würde.

## Definition 114

Die Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ und } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

heißen **Stichprobenmittel** bzw. **Stichprobenvarianz** der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .  $\bar{X}$  und  $S^2$  sind erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert bzw. die Varianz.

## 2.1 Maximum-Likelihood-Prinzip zur Konstruktion von Schätzvariablen

Wir betrachten nun ein Verfahren zur Konstruktion von Schätzvariablen für Parameter von Verteilungen. Sei

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n).$$

Bei  $X_1, \dots, X_n$  handelt es sich um unabhängige Kopien der Zufallsvariablen  $X$  mit der Dichte  $f(x; \theta)$ . Hierbei sei  $\theta$  der gesuchte Parameter der Verteilung. Wir setzen

$$f(x; \theta) = \Pr[X = x],$$

wobei  $\theta$  ein Parameter der Verteilung ist.

Wenn wir den Parameter explizit angeben wollen, so schreiben wir dafür auch  $f(x; \theta) = \Pr_{\theta}[X = x]$ . Eine Stichprobe liefert für jede Variable  $X_i$  einen Wert  $x_i$ . Diese Werte fassen wir ebenfalls zu einem Vektor  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  zusammen.

Der Ausdruck

$$L(\vec{x}; \theta) := \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \Pr_{\theta}[X_i = x_i]$$
$$\stackrel{\text{unabh.}}{=} \Pr_{\theta}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass wir die Stichprobe  $\vec{x}$  erhalten, wenn wir den Parameter mit dem Wert  $\theta$  belegen.

Wir betrachten nun eine feste Stichprobe  $\vec{x}$  und fassen  $L(\vec{x}; \theta)$  somit als Funktion von  $\theta$  auf. In diesem Fall nennen wir  $L$  die **Likelihood-Funktion** der Stichprobe.

Es erscheint sinnvoll, zu einer gegebenen Stichprobe  $\vec{x}$  den Parameter  $\theta$  so zu wählen, dass  $L(x; \theta)$  **maximal** wird.

### Definition 115

Ein Schätzwert  $\hat{\theta}$  für den Parameter einer Verteilung  $f(x; \theta)$  heißt

**Maximum-Likelihood-Schätzwert** (ML-Schätzwert) für eine Stichprobe  $\vec{x}$ , wenn gilt

$$L(\vec{x}; \theta) \leq L(\vec{x}; \hat{\theta}) \text{ für alle } \theta.$$

## Beispiel 116

Wir konstruieren mit der ML-Methode einen Schätzer für den Parameter  $p$  der Bernoulli-Verteilung. Es gilt  $\Pr_p[X_i = 1] = p$  und  $\Pr_p[X_i = 0] = 1 - p$ . Daraus schließen wir, dass  $\Pr_p[X_i = x_i] = p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}$ , und stellen die Likelihood-Funktion

$$L(\vec{x}; p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} \cdot (1 - p)^{1-x_i}$$

auf.

Wir suchen als Schätzer für  $p$  den Wert, an dem die Funktion  $L$  maximal wird. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \ln L(\vec{x}; p) &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \ln p + (1 - x_i) \cdot \ln(1 - p)) \\ &= n\bar{x} \cdot \ln p + (n - n\bar{x}) \cdot \ln(1 - p). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{x}$  das arithmetische Mittel  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

## Beispiel (Forts.)

*Wir finden das Maximum durch Nullsetzen der Ableitung:*

$$\frac{d \ln L(\vec{x}; p)}{dp} = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n - n\bar{x}}{1 - p} = 0.$$

*Diese Gleichung hat die Lösung  $p = \bar{x}$ .*

## Beispiel 117

Die Zufallsvariable  $X$  sei  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, und wir suchen Schätzvariablen für die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ . Nach Definition der Likelihood-Funktion gilt

$$L(\vec{x}; \mu, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left( -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$\ln L(\vec{x}; \mu, \sigma^2) = -n(\ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma) + \sum_{i=1}^n \left( -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

## Beispiel 117

Für die Nullstellen der Ableitungen ergibt sich

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$\mu = \bar{x} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Wir haben also durch die ML-Methode „fast“ das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz erhalten. Allerdings besitzt der Schätzer für die Varianz hier den Vorfaktor  $\frac{1}{n}$  statt  $\frac{1}{n-1}$ . Die ML-Schätzvariable für die Varianz ist somit nicht erwartungstreu.

### 3. Konfidenzintervalle

Bei der Verwendung von Schätzvariablen geht man davon aus, dass der erhaltene Schätzwert „nahe“ beim gesuchten Parameter  $\theta$  liegt. Die Schätzungen werden „besser“, je größer die betrachtete Stichprobe ist. Diese Angaben sind aus quantitativer Sicht natürlich unbefriedigend, da nicht erkennbar ist, wie gut man sich auf den Schätzwert verlassen kann.

Die Lösung dieses Problems besteht darin, statt einer Schätzvariablen  $U$  zwei Schätzer  $U_1$  und  $U_2$  zu betrachten.  $U_1$  und  $U_2$  werden so gewählt, dass

$$\Pr[U_1 \leq \theta \leq U_2] \geq 1 - \alpha.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  heißt **Konfidenzniveau** und kann dem „Sicherheitsbedürfnis“ angepasst werden.

Wenn wir für eine konkrete Stichprobe die Schätzer  $U_1$  und  $U_2$  berechnen und davon ausgehen, dass  $\theta \in [U_1, U_2]$  ist, so ziehen wir höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  einen falschen Schluss.  $[U_1, U_2]$  heißt **Konfidenzintervall**.

In vielen Fällen verwendet man nur eine Schätzvariable  $U$  und konstruiert mittels  $U_1 := U - \delta$  und  $U_2 := U + \delta$  ein symmetrisches Konfidenzintervall  $[U - \delta, U + \delta]$ .

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, und seien  $X_1, \dots, X_n$   $n$  zugehörige Stichprobenvariablen. Gemäß der Additivität der Normalverteilung (siehe Satz 106) ist das Stichprobenmittel  $\bar{X}$  ebenfalls normalverteilt mit  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . Wir suchen für  $\bar{X}$  ein symmetrisches Konfidenzintervall.

Nach Satz 93 ist

$$Z := \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

Für  $Z$  betrachten wir das Konfidenzintervall  $[-c, c]$  für ein geeignetes  $c > 0$  und setzen

$$\Pr[-c \leq Z \leq c] \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Auflösen nach  $\mu$  ergibt

$$\Pr \left[ \bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \right] \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Das gesuchte Konfidenzintervall lautet also

$$K = \left[ \bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Den Parameter  $c$  wählen wir wie folgt:

$$\Pr[-c \leq Z \leq c] = \Phi(c) - \Phi(-c) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Wegen der Symmetrie von  $\Phi$  gilt  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  und wir erhalten

$$\Phi(c) - \Phi(-c) = 2 \cdot \Phi(c) - 1 \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \iff \Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

also

$$c = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

### Definition 118

$X$  sei eine stetige Zufallsvariable mit Verteilung  $F_X$ . Eine Zahl  $x_\gamma$  mit

$$F_X(x_\gamma) = \gamma$$

heißt  $\gamma$ -Quantil von  $X$  bzw. der Verteilung  $F_X$ .

### Definition 119

Für die Standardnormalverteilung bezeichnet  $z_\gamma$  das  $\gamma$ -Quantil.

Damit können wir das gesuchte Konfidenzintervall angeben durch

$$K = \left[ \bar{X} - \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

## 4. Testen von Hypothesen

### 4.1 Einführung

Bislang haben wir versucht, Parameter von Verteilungen zu schätzen. In der Praxis ist man jedoch oft an der eigentlichen Kenntnis dieser Parameter gar nicht interessiert, sondern man möchte gewisse, damit zusammenhängende Behauptungen überprüfen.

Im Folgenden stellen wir die Bestandteile eines statistischen Tests anhand eines abstrakten Beispiels vor. Wir betrachten dazu eine Zufallsvariable  $X$  mit  $\Pr[X = 1] = p$  und  $\Pr[X = 0] = 1 - p$ . Durch einen Test soll überprüft werden, ob  $p < 1/3$  oder  $p \geq 1/3$  gilt.

## Definition eines Tests

Wir betrachten eine Stichprobe von  $n$  unabhängigen Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , die dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable  $X$  besitzen. Zu einem zugehörigen Stichprobenvektor  $\vec{x}$  müssen wir nun die Frage beantworten, ob wir für diesen Versuchsausgang die Hypothese „ $p \geq 1/3$ “ annehmen oder ablehnen.

Sei

$$K := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \vec{x} \text{ führt zur Ablehnung der Hypothese}\}.$$

$K$  nennen wir den **Ablehnungsbereich** oder den **kritischen Bereich** des Tests.

Gewöhnlich wird  $K$  konstruiert, indem man die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  zu einer neuen Variablen  $T$ , der so genannten **Testgröße**, zusammenfasst. Dann unterteilt man den Wertebereich  $\mathbb{R}$  von  $T$  in mehrere Bereiche, die entweder zur Ablehnung der Hypothese führen sollen oder nicht. Dabei betrachtet man meist ein einzelnes halboffenes oder abgeschlossenes Intervall und spricht dann von einem **einseitigen** bzw. von einem **zweiseitigen** Test.

Die Menge  $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}$  enthalte die Werte von  $T$ , die zur Ablehnung der Hypothese führen sollen. Da wir Tests immer über eine Testgröße definieren, werden wir der Einfachheit halber auch  $\tilde{K}$  als Ablehnungsbereich bezeichnen.  $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}$  entspricht direkt dem Ablehnungsbereich  $K = T^{-1}(\tilde{K}) \subseteq \mathbb{R}^n$ , wie wir ihn oben festgelegt haben.

Die zu überprüfende Hypothese bezeichnen wir mit  $H_0$  und sprechen deshalb auch von der **Nullhypothese**. Bei manchen Tests formuliert man noch eine zweite Hypothese  $H_1$ , die so genannte **Alternative**. Im Beispiel können wir

$$H_0 : p \geq 1/3 \text{ und } H_1 : p < 1/3$$

setzen.

Manchmal verzichtet man darauf,  $H_1$  anzugeben. Dann besteht die Alternative wie oben einfach darin, dass  $H_0$  nicht gilt. In diesem Fall nennen wir  $H_1$  **triviale Alternative**.

Ein echter, also nicht-trivialer Alternativtest läge beispielsweise vor, wenn wir ansetzen

$$H'_0 : p \geq 1/3 \text{ und } H'_1 : p \leq 1/6.$$

### Beispiel 120

Wir untersuchen eine Festplatte, von der bekannt ist, dass sie zu einer von zwei Baureihen gehört. Die mittleren Zugriffszeiten dieser Baureihen betragen 9ms bzw. 12ms. Wir möchten nun herausfinden, zu welchem Typ die betrachtete Festplatte gehört, indem wir die Zugriffszeit bei  $n$  Zugriffen bestimmen. Hier würde man dann ansetzen:  $H_0 : \mu \leq 9$  und  $H_1 := \mu \geq 12$ , wobei  $\mu$  die mittlere Zugriffszeit bezeichnet.

## Fehler bei statistischen Tests

Bei jedem statistischen Test können mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit falsche Schlüsse gezogen werden. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn  $H_0$  gilt, aber das Ergebnis  $\vec{x}$  der Stichprobe im Ablehnungsbereich  $K$  liegt.

Dann spricht man von einem Fehler 1. Art.

Analog erhalten wir einen Fehler 2. Art, wenn  $H_0$  nicht gilt und  $\vec{x}$  nicht im Ablehnungsbereich liegt.

Fehler 1. Art :  $H_0$  gilt, wird aber abgelehnt.

Fehler 2. Art :  $H_0$  gilt nicht, wird aber angenommen.

Für die Beurteilung eines Tests ist es wesentlich, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese beiden Fehler eintreten können. Ziel ist es natürlich, diese Wahrscheinlichkeiten möglichst klein zu halten. Allerdings sind die Minimierung des Fehlers 1. Art und des Fehlers 2. Art gegenläufige Ziele, so dass ein vernünftiger Ausgleich zwischen beiden Fehlern gefunden werden muss. Wenn man beispielsweise  $K = \emptyset$  setzt, so erhält man Wahrscheinlichkeit Null für den Fehler 1. Art, da  $H_0$  immer angenommen wird. Allerdings tritt der Fehler 2. Art dann mit Wahrscheinlichkeit Eins ein, wenn  $H_0$  nicht gilt.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art wird mit  $\alpha$  bezeichnet, und man spricht deshalb gelegentlich vom  $\alpha$ -Fehler.  $\alpha$  heißt auch **Signifikanzniveau** des Tests.

In der Praxis ist es üblich, sich ein Signifikanzniveau  $\alpha$  vorzugeben (übliche Werte hierfür sind 0,05, 0,01 oder 0,001) und dann den Test so auszulegen (also den Ablehnungsbereich  $K$  so zu bestimmen), dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art den Wert  $\alpha$  besitzt.

## Konstruktion eines einfachen Tests

Wir konstruieren einen Test für den Parameter  $p$  einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen  $X$ . Wir setzen

$$H_0 : p \geq p_0, \quad H_1 : p < p_0.$$

Als Testgröße verwenden wir

$$T := X_1 + \dots + X_n.$$

Für größere Wahrscheinlichkeiten  $p$  erwarten wir auch größere Werte für  $T$ . Deshalb ist es sinnvoll, einen Ablehnungsbereich der Art  $K := [0, k]$  für  $T$  zu wählen, wobei  $k \in \mathbb{R}$  geeignet festzulegen ist. Wir konstruieren hier also einen einseitigen Test, während für eine Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  sowohl zu kleine als auch zu große Werte von  $T$  zur Ablehnung von  $H_0$  führen sollten und somit ein zweiseitiger Test vorzuziehen wäre.

$T$  ist binomialverteilt. Da wir von einem großen Stichprobenumfang  $n$  ausgehen, bietet es sich an, die Verteilung von  $T$  nach dem Grenzwertsatz von de Moivre (siehe Korollar 109) durch die Normalverteilung zu approximieren.

Sei

$$\tilde{T} := \frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

$\tilde{T}$  ist annähernd standardnormalverteilt.

Wir berechnen für jeden Wert von  $k$  das zugehörige Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests.

$$\begin{aligned}\text{Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art} &= \max_{p \in H_0} \Pr_p[T \in K] \\ &= \max_{p \in H_0} \Pr_p[T \leq k]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art} &= \sup_{p \in H_1} \Pr_p[T \notin K] \\ &= \sup_{p \in H_1} \Pr_p[T > k]\end{aligned}$$

Für den Fehler 1. Art  $\alpha$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \max_{p \geq p_0} \Pr_p[T \leq k] = \Pr_{p=p_0}[T \leq k] \\ &= \Pr_{p=p_0} \left[ \tilde{T} \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right] \\ &= \Pr \left[ \tilde{T} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right] \approx \Phi \left( \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Quantile der Standardnormalverteilung ergibt sich damit:

- Ist  $k$  so gewählt, dass  $(k - np_0)/\sqrt{np_0(1 - p_0)} = z_\alpha$ , so ist das Signifikanzniveau gleich  $\alpha$ .
- Ist das gewünschte Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests vorgegeben, so erhält man den Wert  $k = k(n)$  in Abhängigkeit vom Umfang  $n$  der Stichprobe durch

$$k = z_\alpha \cdot \sqrt{np_0(1 - p_0)} + np_0. \quad (8)$$

Kleinere Werte für  $k$  verkleinern zwar den Fehler 1. Art, vergrößern jedoch den Annahmehereich und damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.