

8 Anwendung: Suchen

Gegeben: Folge a ganzer Zahlen; Element x

Gesucht: Wo kommt x in a vor?

Naives Vorgehen:

- ▶ Vergleiche x der Reihe nach mit $a[0]$, $a[1]$, usw.
- ▶ Finden wir i mit $a[i] == x$, geben wir i aus.
- ▶ Andernfalls geben wir -1 aus: „Element nicht gefunden“!

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

8 Anwendung: Suchen

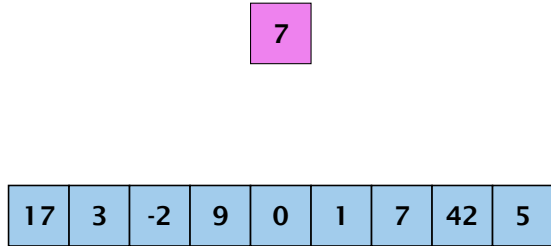
Gegeben: Folge a ganzer Zahlen; Element x

Gesucht: Wo kommt x in a vor?

Naives Vorgehen:

- ▶ Vergleiche x der Reihe nach mit $a[0]$, $a[1]$, usw.
- ▶ Finden wir i mit $a[i] == x$, geben wir i aus.
- ▶ Andernfalls geben wir -1 aus: „Element nicht gefunden“!

Beispiel

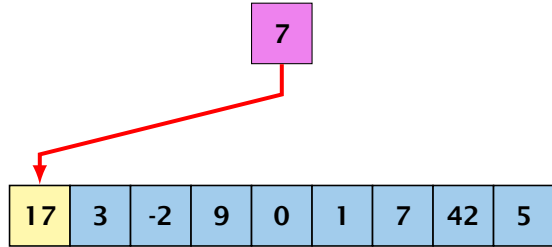


Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



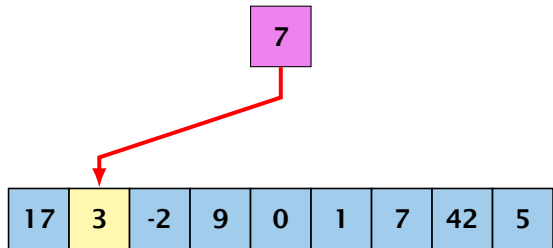
no

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



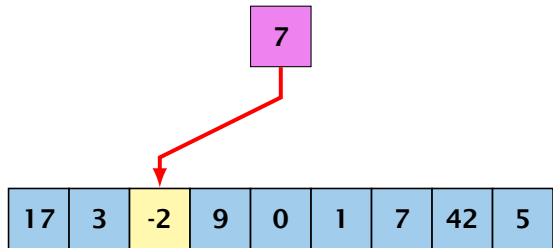
no

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



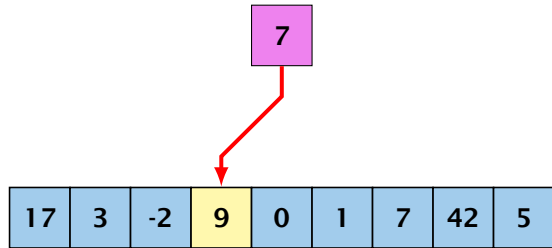
no

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



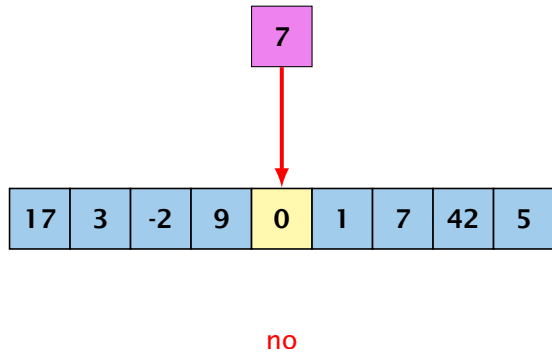
no

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel

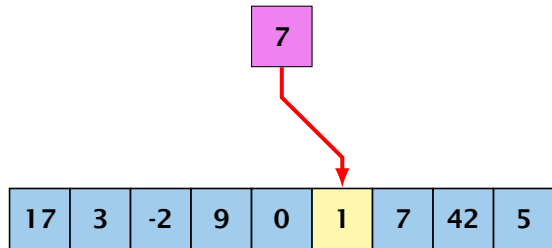


Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



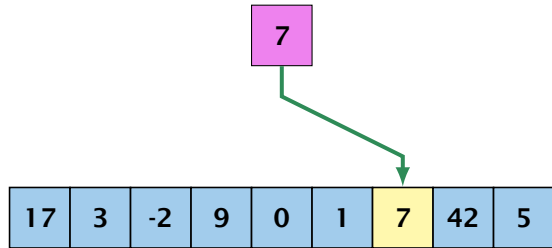
no

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Beispiel



yes

Naives Suchen

```
1 public static int find(int[] a, int x) {  
2     int i = 0;  
3     while (i < a.length && a[i] != x)  
4         ++i;  
5     if (i == a.length)  
6         return -1;  
7     else  
8         return i;  
9 }
```

Naives Suchen

Naives Suchen

- ▶ Im Beispiel benötigen wir 7 Vergleiche
- ▶ Im schlimmsten Fall (**worst case**) benötigen wir bei einem Feld der Länge n sogar n Vergleiche.
- ▶ Kommt x tatsächlich im Feld vor, benötigen wir selbst im Durchschnitt $(n + 1)/2$ Vergleiche.

...geht das nicht besser?

Beispiel

7

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

no

Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ binäre Suche

Naives Suchen

- ▶ Im Beispiel benötigen wir 7 Vergleiche
- ▶ Im schlimmsten Fall (**worst case**) benötigen wir bei einem Feld der Länge n sogar n Vergleiche.
- ▶ Kommt x tatsächlich im Feld vor, benötigen wir selbst im Durchschnitt $(n + 1)/2$ Vergleiche.

... geht das nicht besser?

Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

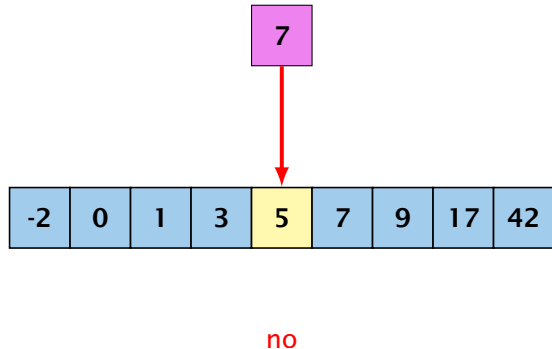
Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Beispiel



- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

no

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

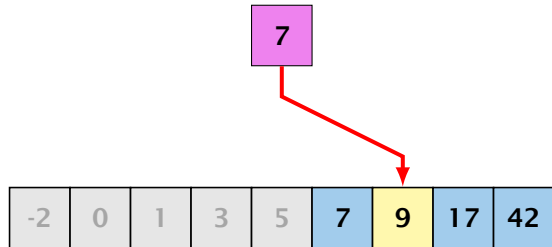
Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Beispiel



no

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

no

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

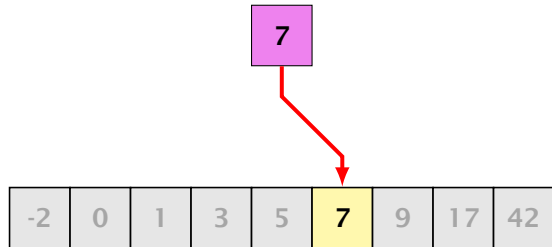
Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Beispiel



yes

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

Binäre Suche

Idee:

- ▶ Sortiere das Feld.
- ▶ Vergleiche x mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist x kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist x größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ **binäre Suche**

Implementierung

Idee:

Führe Hilfsfunktion

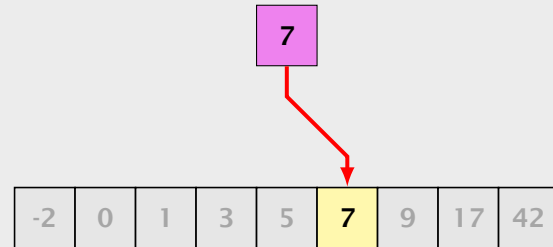
```
public static int find0(int[] a, int x, int n1, int n2)
```

ein, die im Interval $[n1, n2]$ sucht.

Damit:

```
public static int find(int[] a, int x) {  
    return find0(a, x, 0, a.length - 1);  
}
```

Beispiel



yes

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche
- ▶ hat das Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche

Implementierung

```
1 public static int find0(int[] a, int x, int n1, int n2) {
2     int t = (n1 + n2) / 2;
3     if (a[t] == x)
4         return t;
5     else if (n1 == n2)
6         return -1;
7     else if (x > a[t])
8         return find0(a, x, t+1, n2);
9     else if (n1 < t)
10        return find0(a, x, n1, t-1);
11     else return -1;
12 }
```

Implementierung

Idee:

Führe Hilfsfunktion

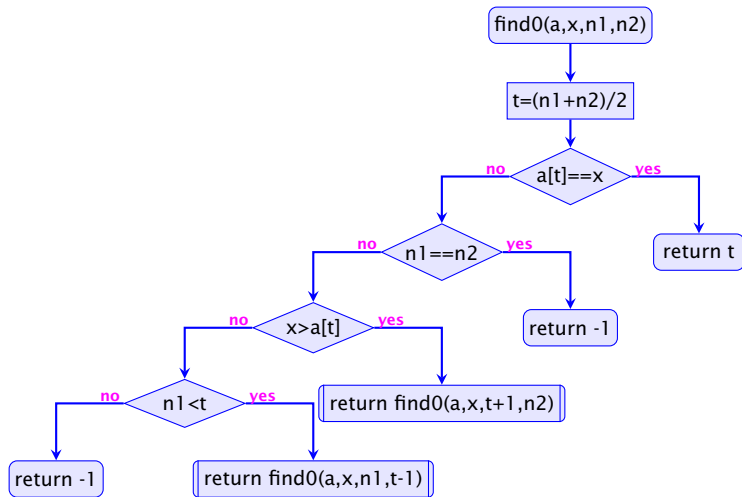
```
public static int find0(int[] a, int x, int n1, int n2)
```

ein, die im Intervall $[n1, n2]$ sucht.

Damit:

```
public static int find(int[] a, int x) {
    return find0(a, x, 0, a.length - 1);
}
```

Kontrollflussdiagramm für find0



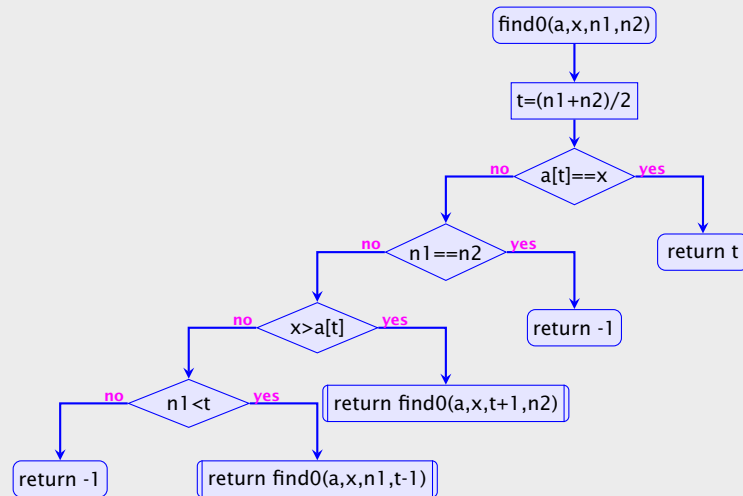
Implementierung

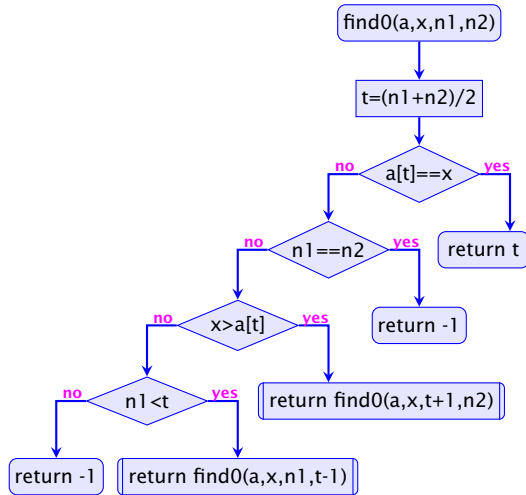
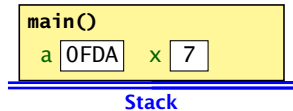
```
1 public static int find0(int[] a, int x, int n1, int n2) {  
2     int t = (n1 + n2) / 2;  
3     if (a[t] == x)  
4         return t;  
5     else if (n1 == n2)  
6         return -1;  
7     else if (x > a[t])  
8         return find0(a, x, t+1, n2);  
9     else if (n1 < t)  
10        return find0(a, x, n1, t-1);  
11     else return -1;  
12 }
```

Erläuterungen:

- ▶ zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können)
- ▶ `find0()` ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Kontrollflussdiagramm für `find0`

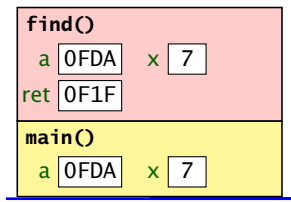




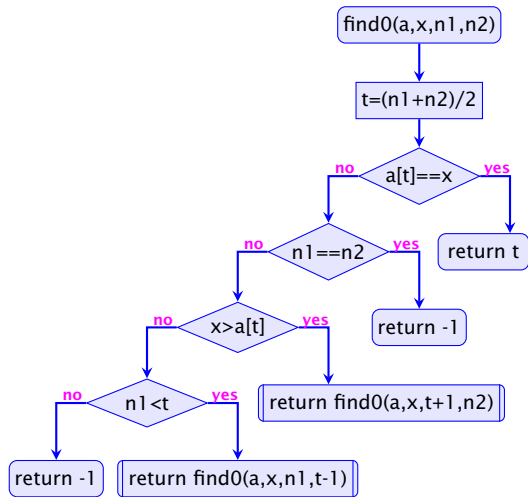
Erläuterungen:

- ▶ zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können)
- ▶ `find0()` ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

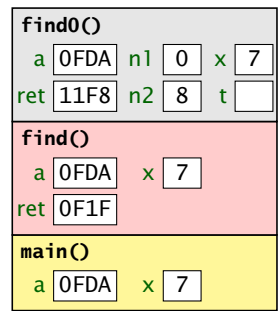


Implementierung

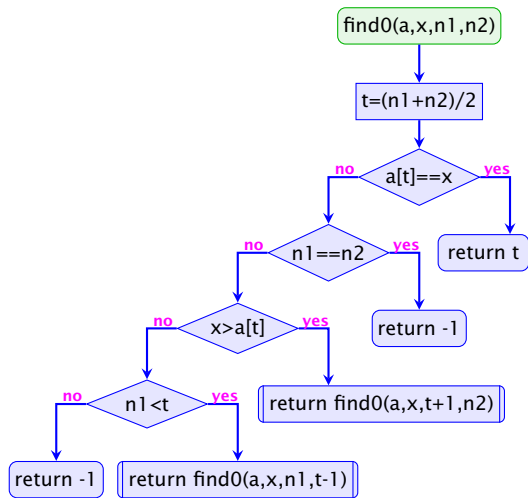
Erläuterungen:

- ▶ zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können)
- ▶ `find0()` ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

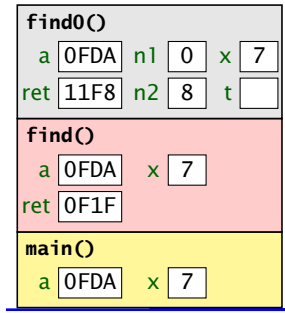


Implementierung

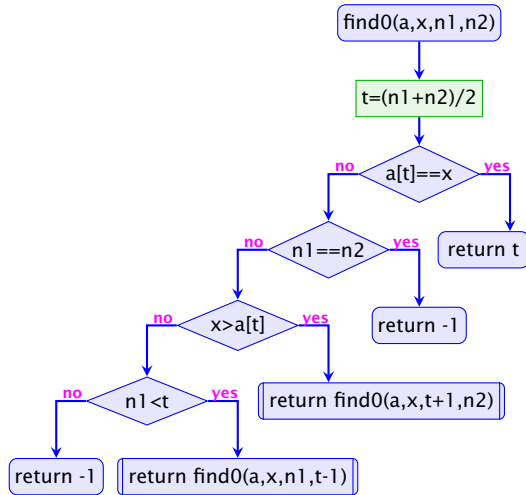
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

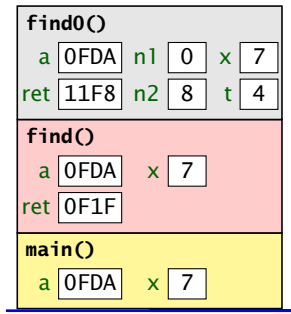


Implementierung

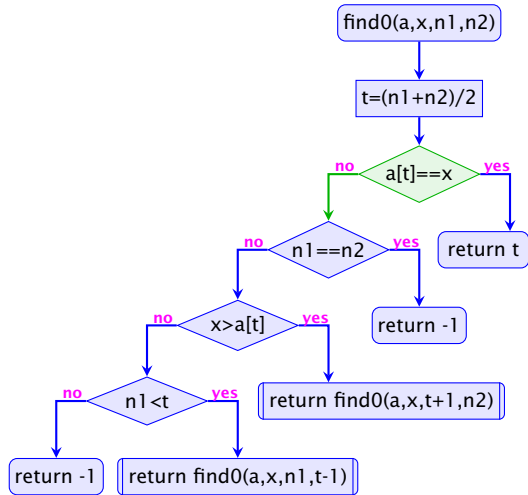
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

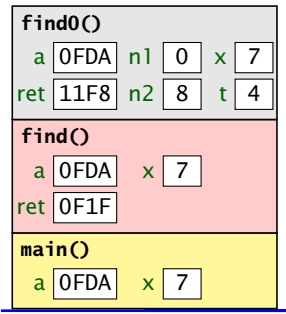


Implementierung

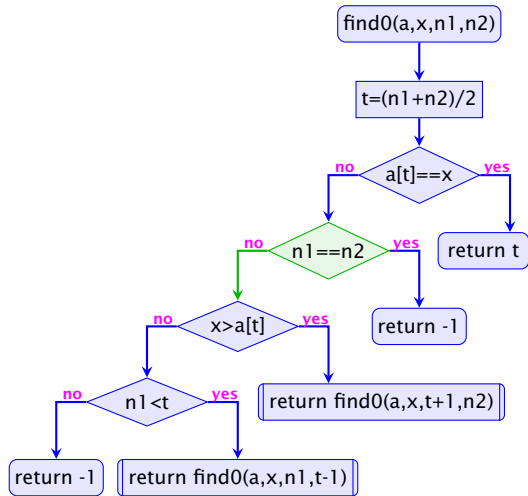
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

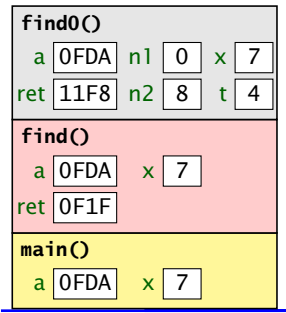


Implementierung

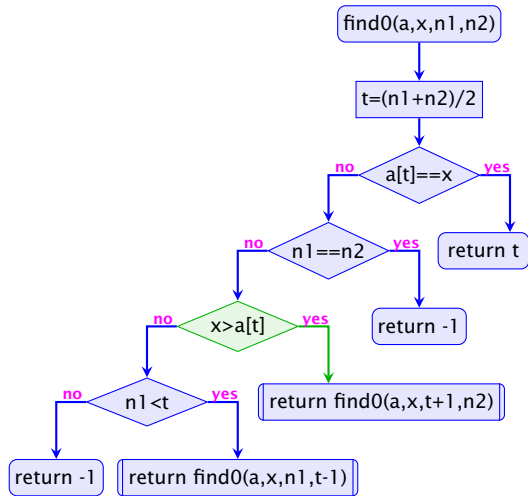
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

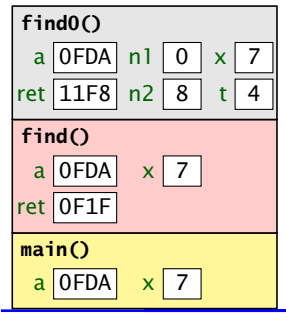


Implementierung

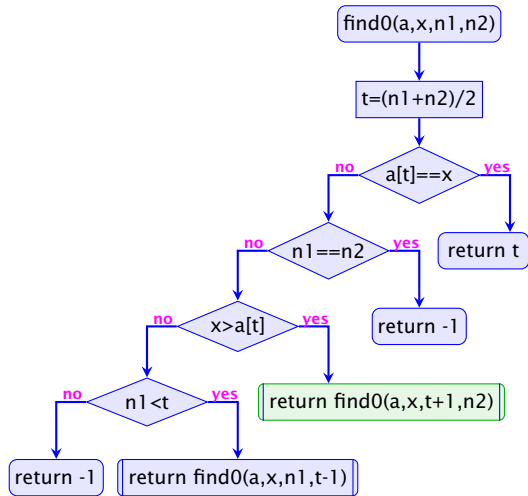
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

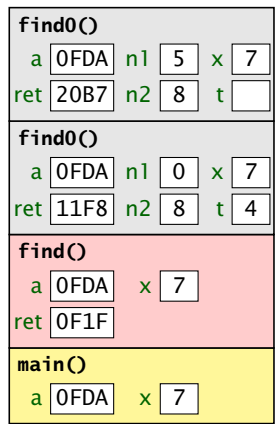


Implementierung

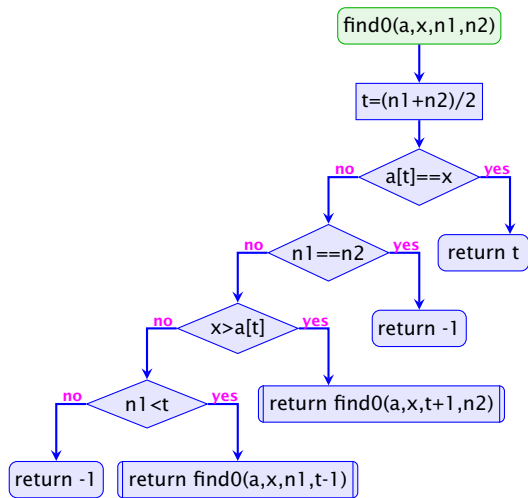
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack



Implementierung

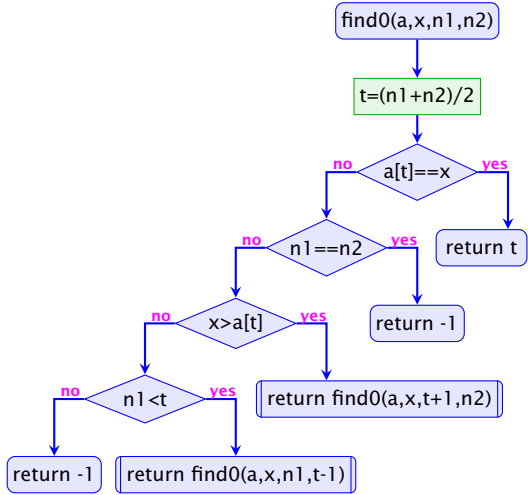
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung

find0()					
a	0FDA	n1	5	x	7
ret	20B7	n2	8	t	
find0()					
a	0FDA	n1	0	x	7
ret	11F8	n2	8	t	4
find()					
a	0FDA	x	7		
ret	0F1F				
main()					
a	0FDA	x	7		

Stack

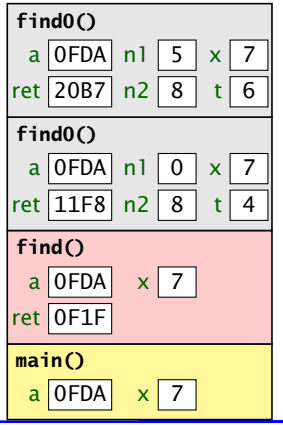


Implementierung

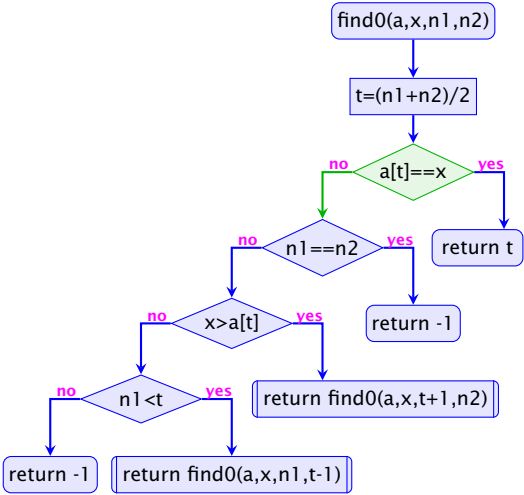
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

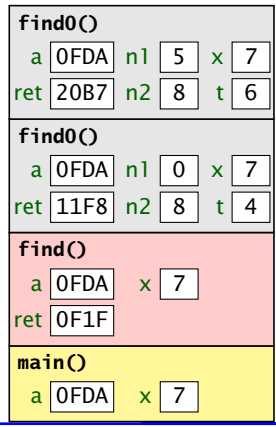


Implementierung

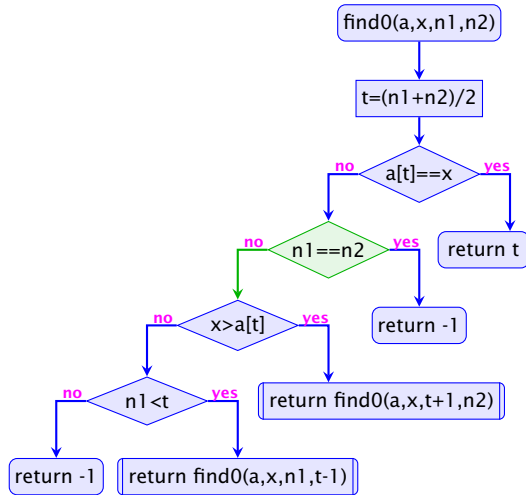
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

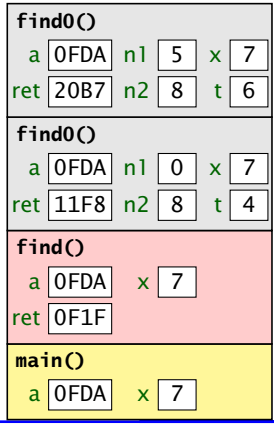


Implementierung

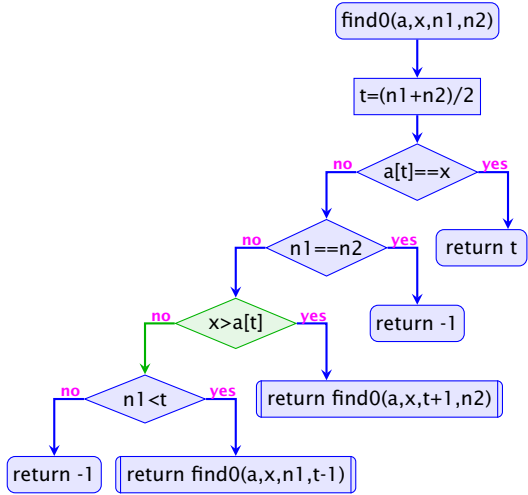
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

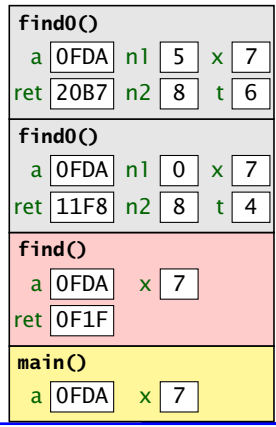


Implementierung

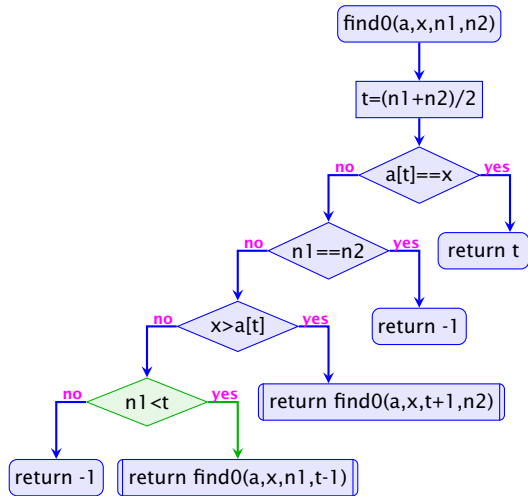
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

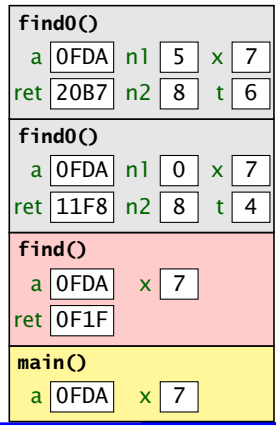


Implementierung

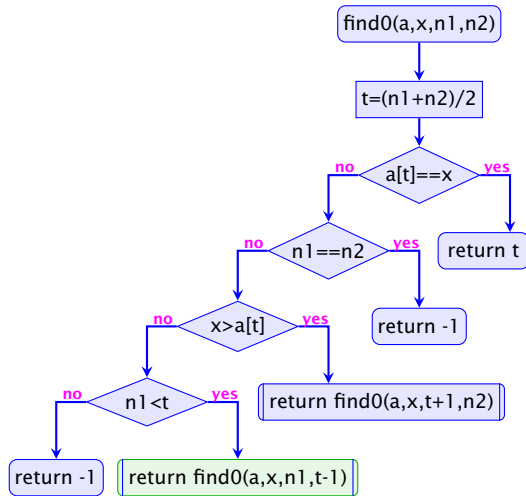
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

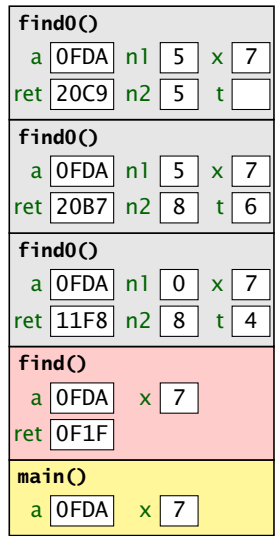


Implementierung

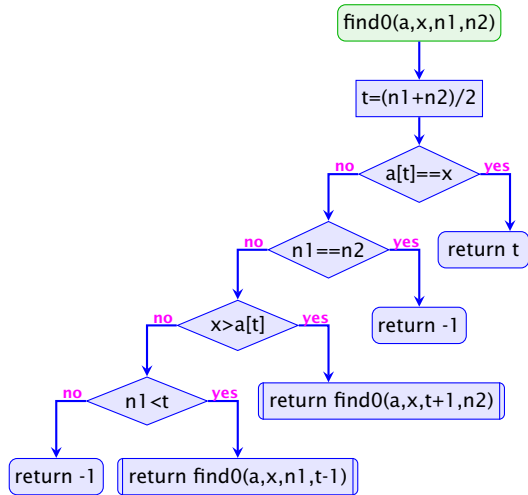
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

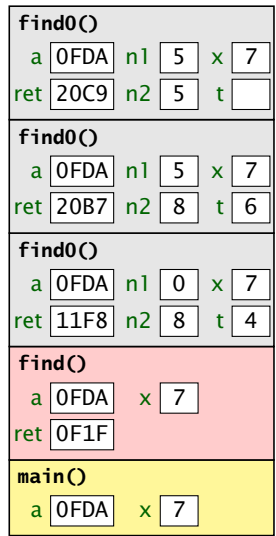


Implementierung

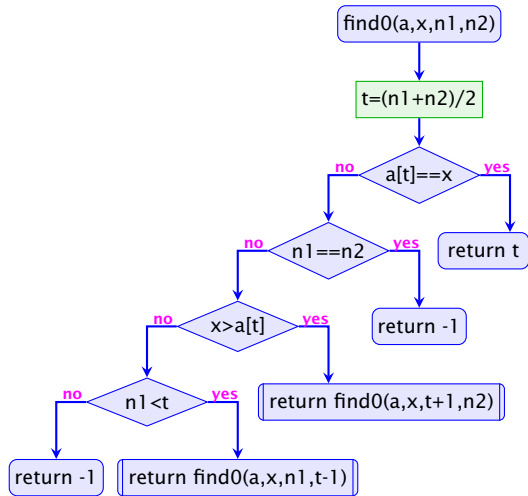
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

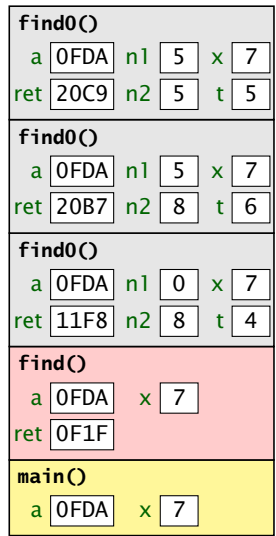


Implementierung

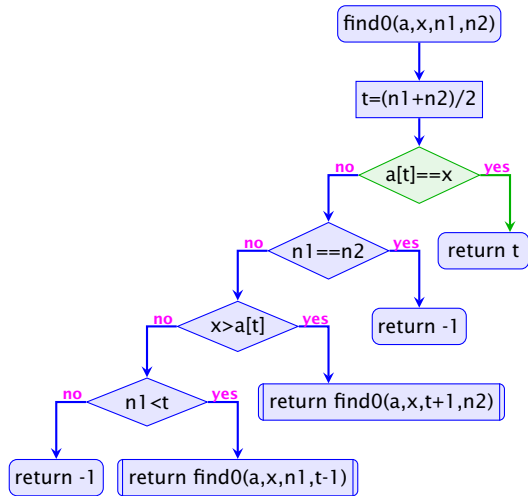
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack

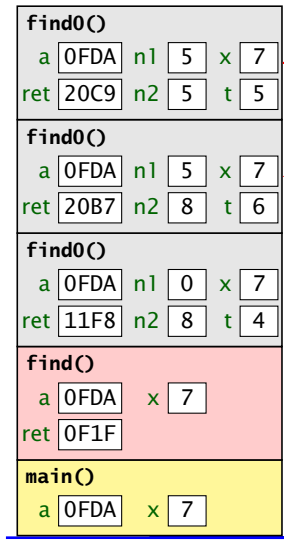


Implementierung

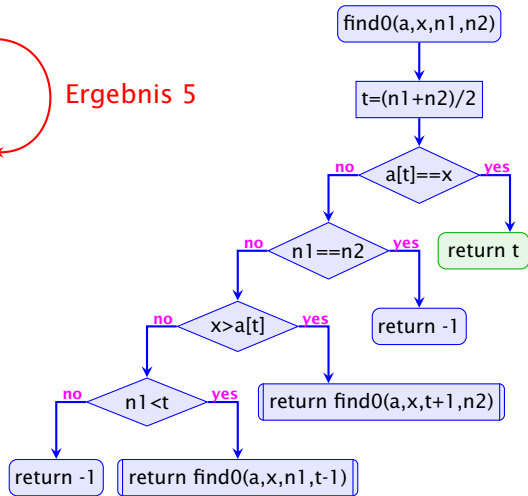
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Ergebnis 5

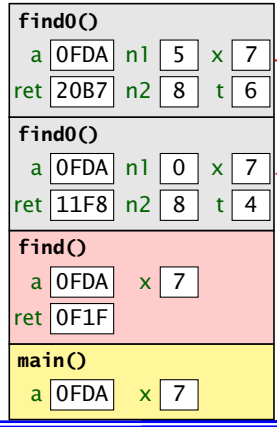


Implementierung

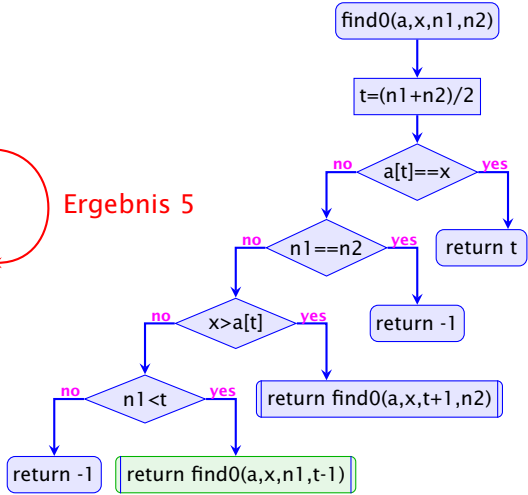
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Ergebnis 5

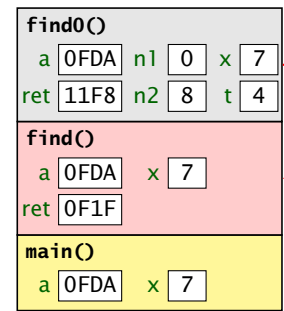


Implementierung

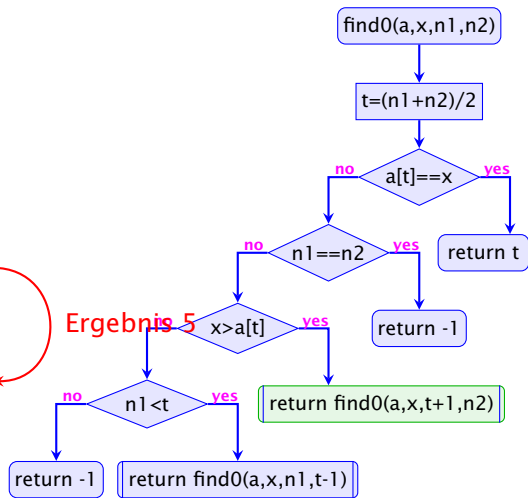
Erläuterungen:

- ▶ zwei der **return**-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable **result** einführen können)
- ▶ **find0()** ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Stack



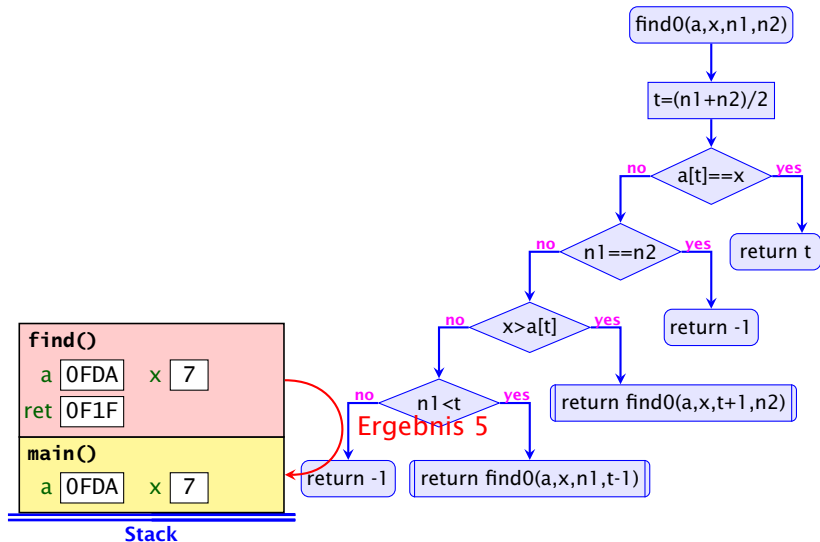
Ergebnis 5

Implementierung

Erläuterungen:

- ▶ zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können)
- ▶ `find0()` ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

Ausführung



Implementierung

Erläuterungen:

- ▶ zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- ▶ (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können)
- ▶ `find0()` ruft sich selbst auf.
- ▶ Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen **rekursiv**.

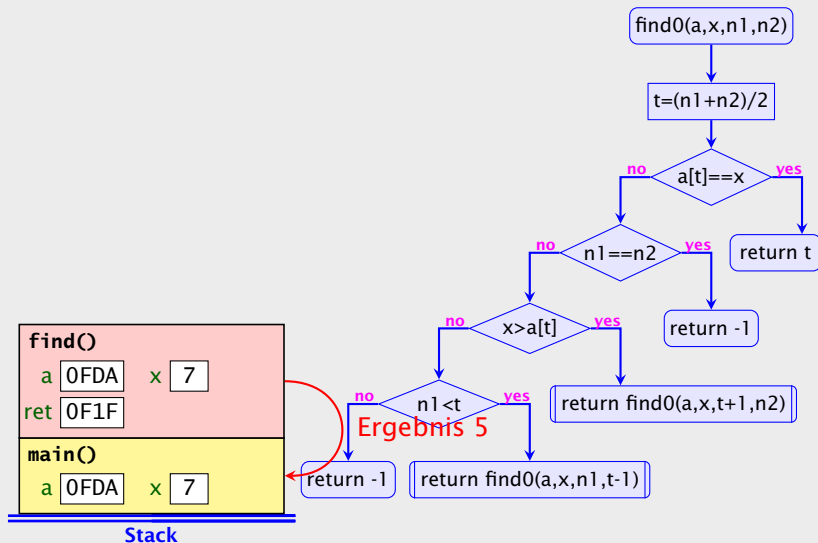
Terminierung

Um zu **beweisen**, dass `find0()` terminiert, beobachten wir:

1. Wird `find0()` für ein einelementiges Intervall `[n,n]` aufgerufen, dann terminiert der Funktionsaufruf direkt.
2. wird `find0()` für ein Intervall `[n1,n2]` aufgerufen mit mehr als einem Element, dann terminiert der Aufruf entweder direkt (weil `x` gefunden wurde), oder `find0()` wird mit einem Intervall aufgerufen, das **echt** in `[n1,n2]` enthalten ist, genauer: sogar maximal die Hälfte der Elemente von `[n1,n2]` enthält.

Ähnliche Beweistechnik wird auch für andere rekursive Funktionen verwendet.

Ausführung



Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

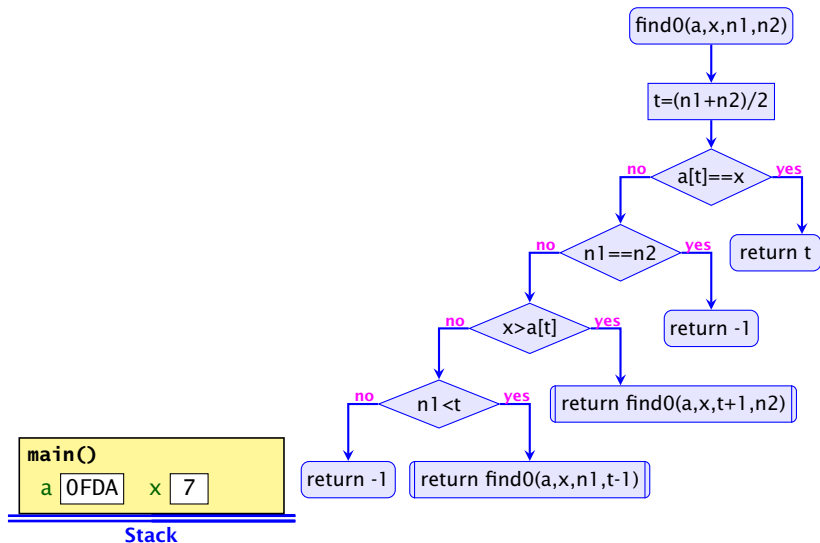
Terminierung

Um zu **beweisen**, dass `find0()` terminiert, beobachten wir:

1. Wird `find0()` für ein einelementiges Intervall $[n, n]$ aufgerufen, dann terminiert der Funktionsaufruf direkt.
2. wird `find0()` für ein Intervall $[n1, n2]$ aufgerufen mit mehr als einem Element, dann terminiert der Aufruf entweder direkt (weil `x` gefunden wurde), oder `find0()` wird mit einem Intervall aufgerufen, das **echt** in $[n1, n2]$ enthalten ist, genauer: sogar maximal die Hälfte der Elemente von $[n1, n2]$ enthält.

Ähnliche Beweistechnik wird auch für andere rekursive Funktionen verwendet.

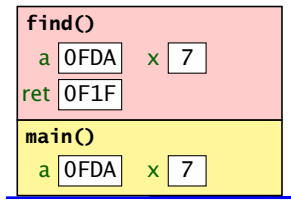
Verbesserte Ausführung



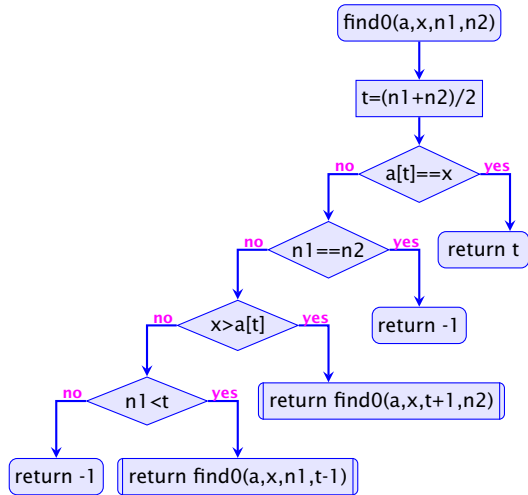
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



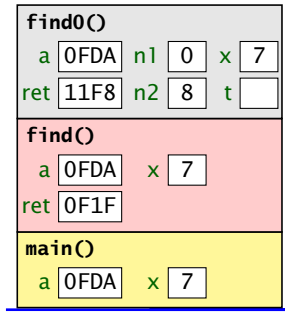
Stack



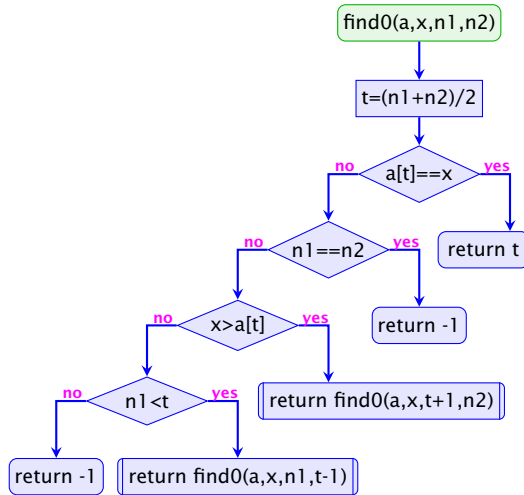
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



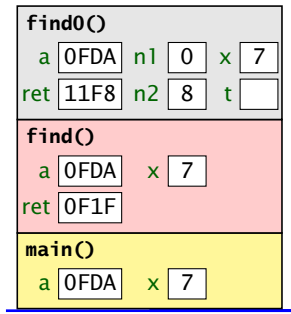
Stack



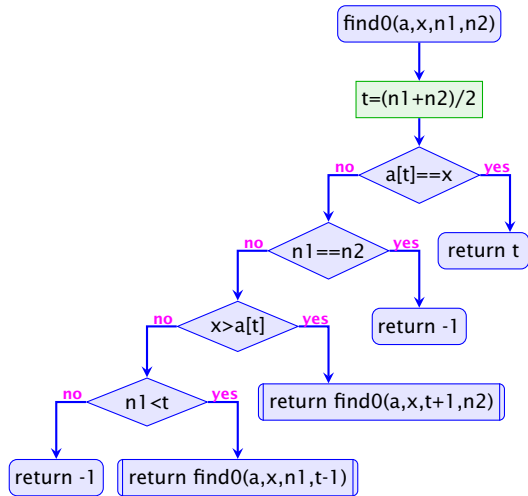
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



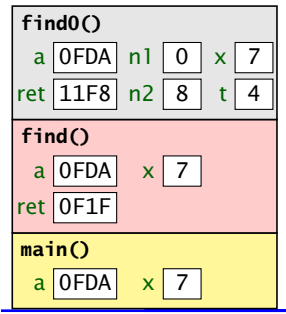
Stack



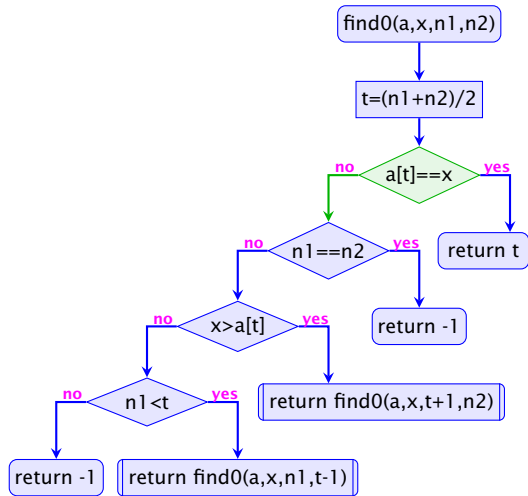
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



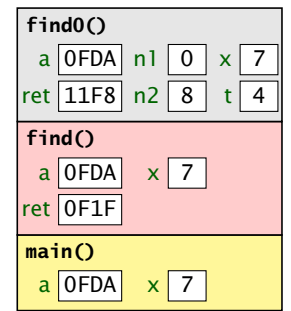
Stack



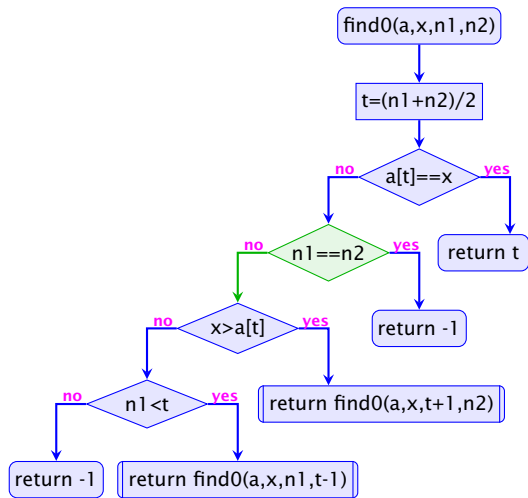
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



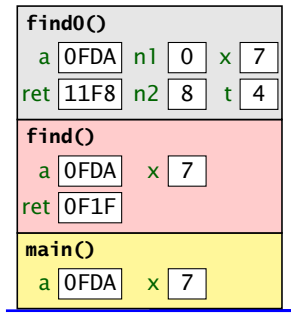
Stack



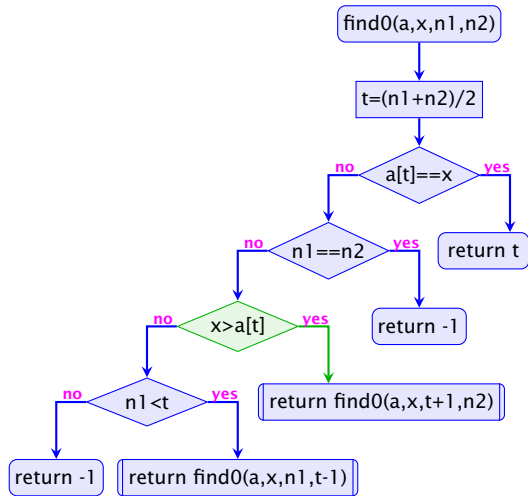
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



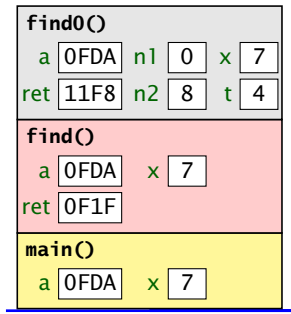
Stack



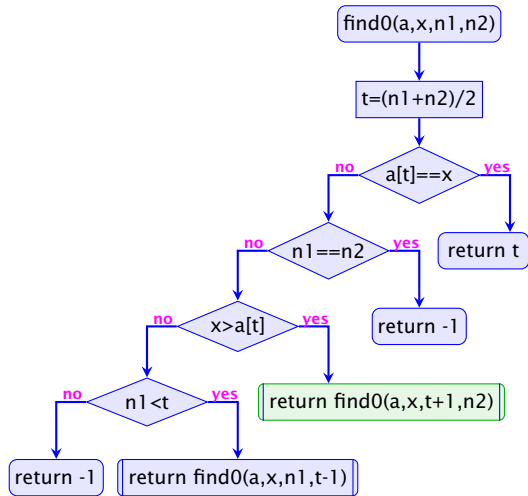
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



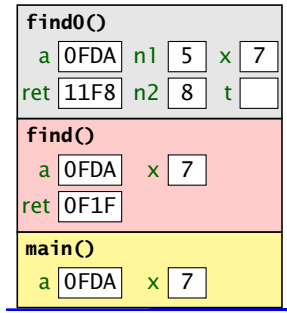
Stack



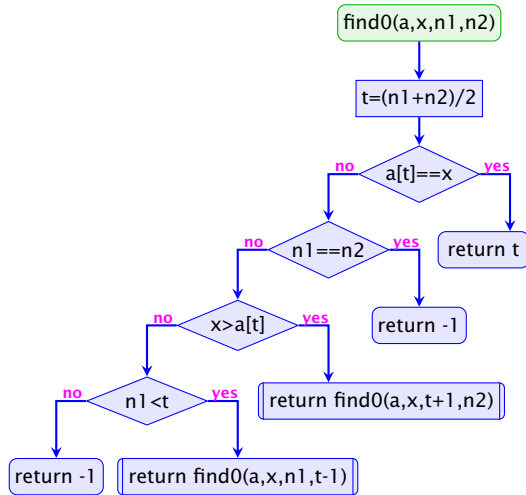
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



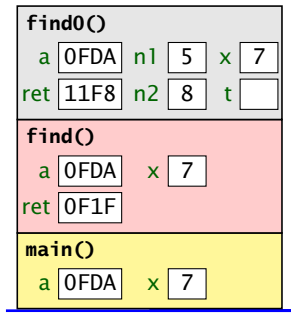
Stack



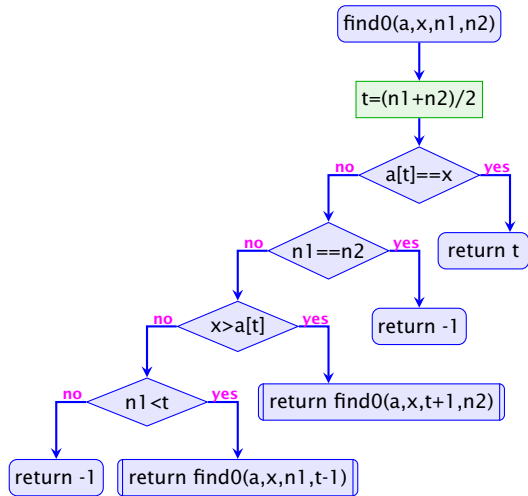
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



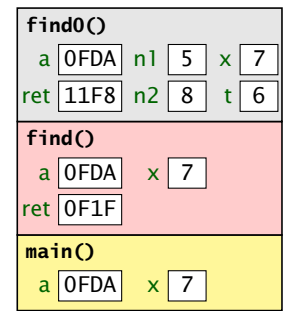
Stack



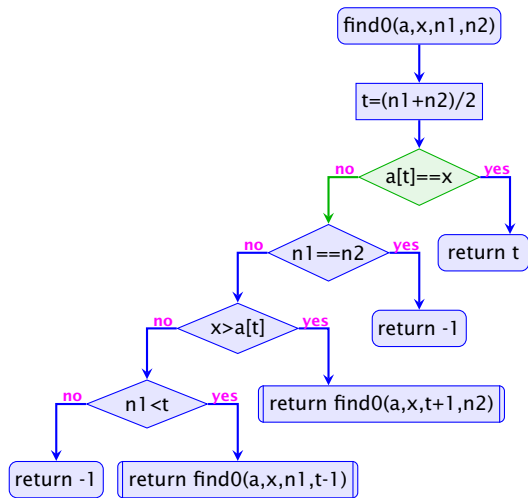
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



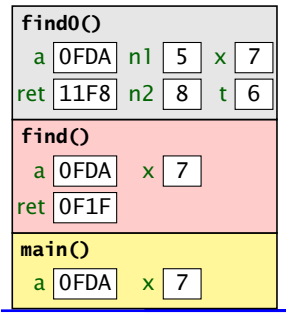
Stack



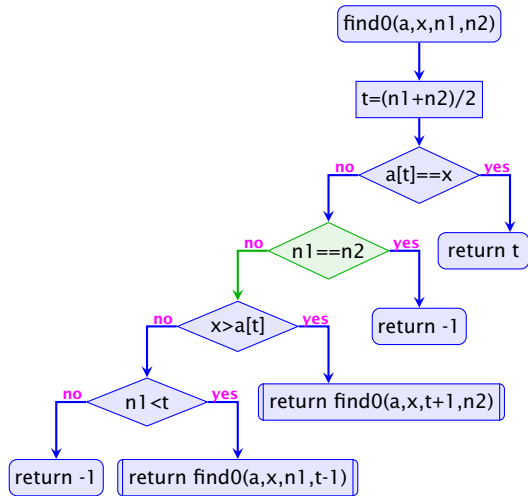
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



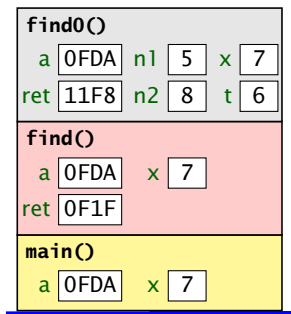
Stack



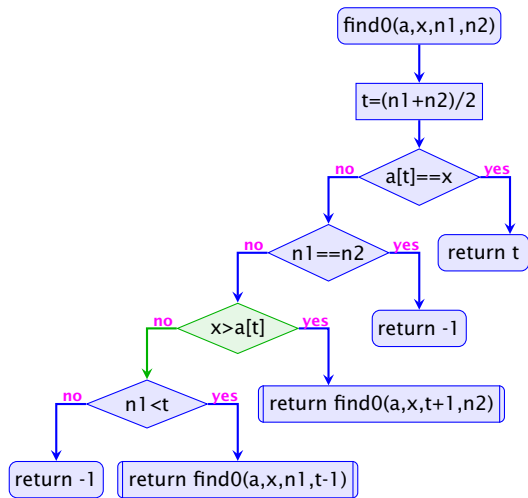
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



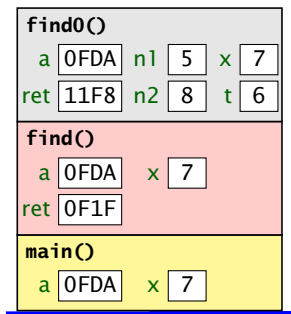
Stack



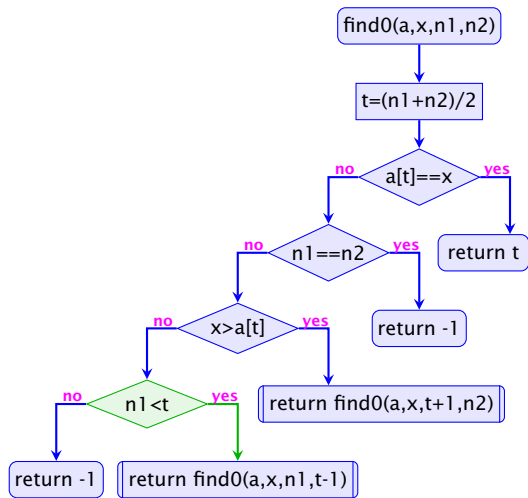
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



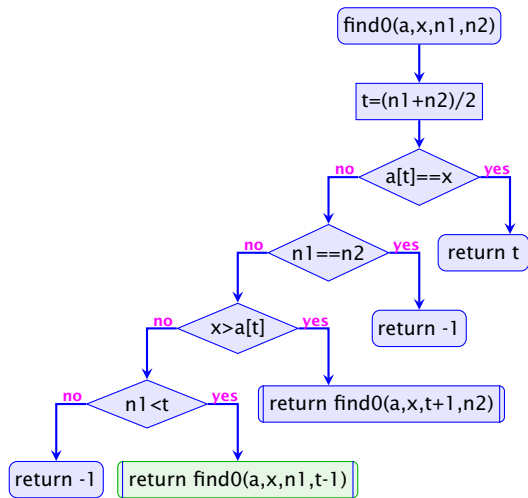
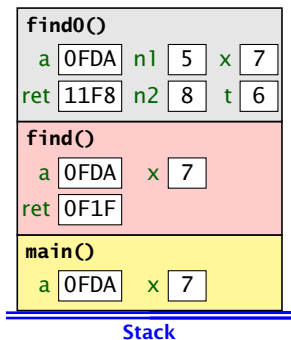
Stack



Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

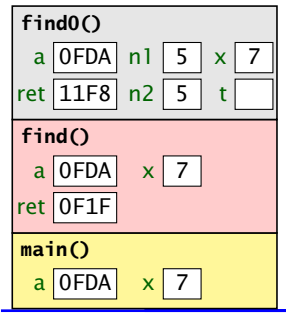
Verbesserte Ausführung



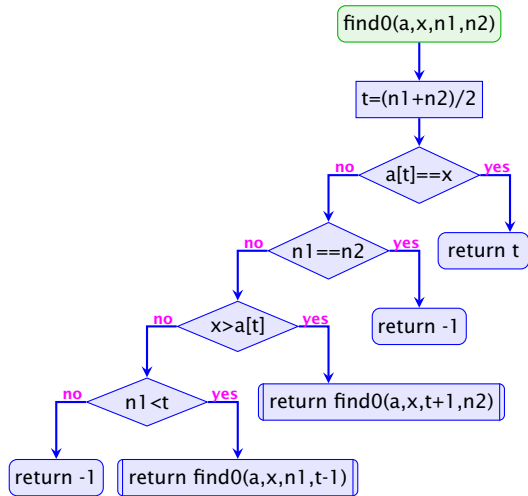
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



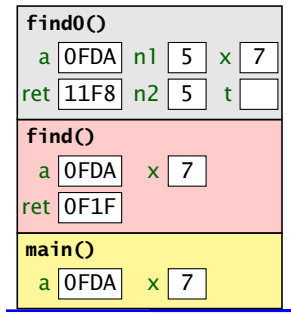
Stack



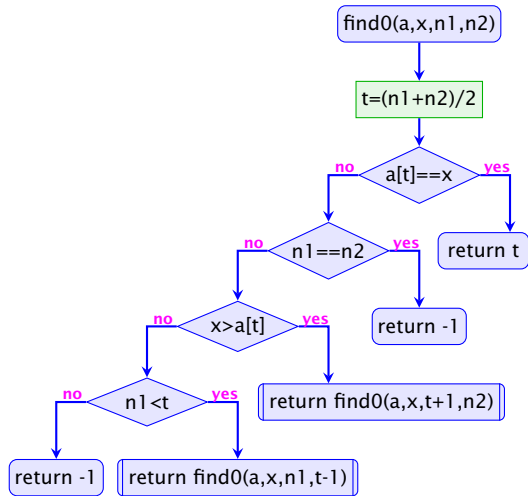
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



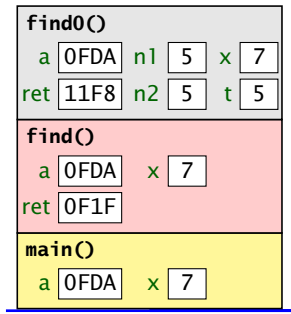
Stack



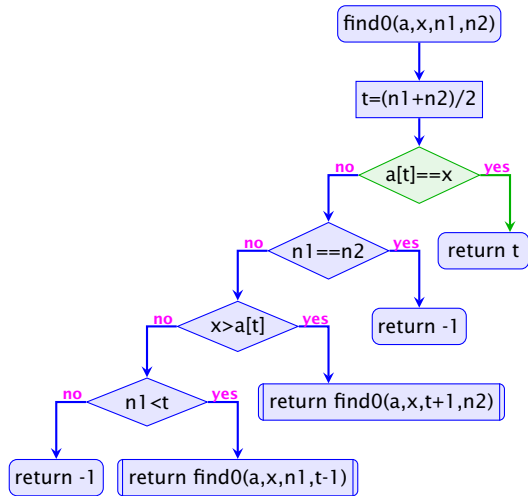
Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



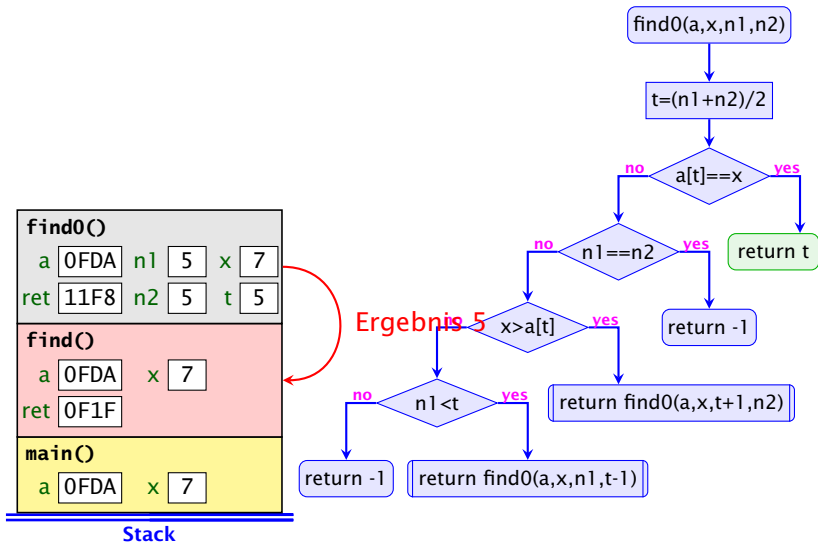
Stack



Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

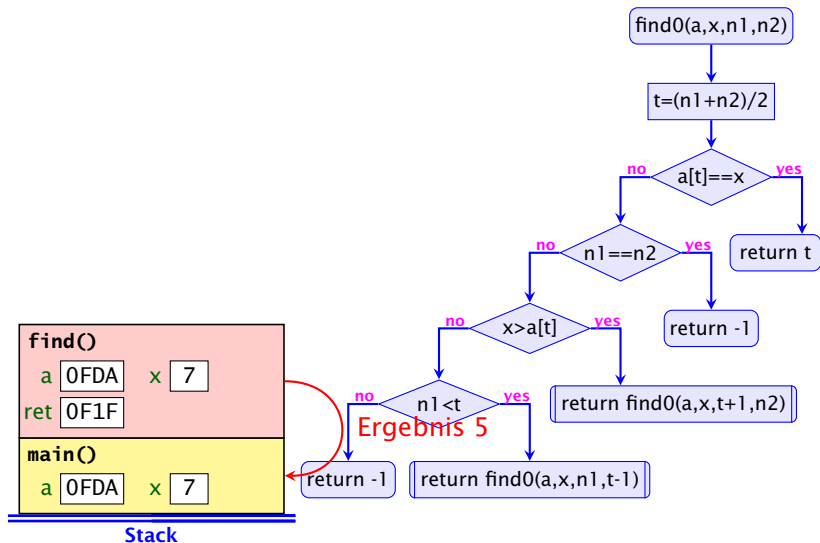
Verbesserte Ausführung



Beobachtung

- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

Verbesserte Ausführung



Beobachtung

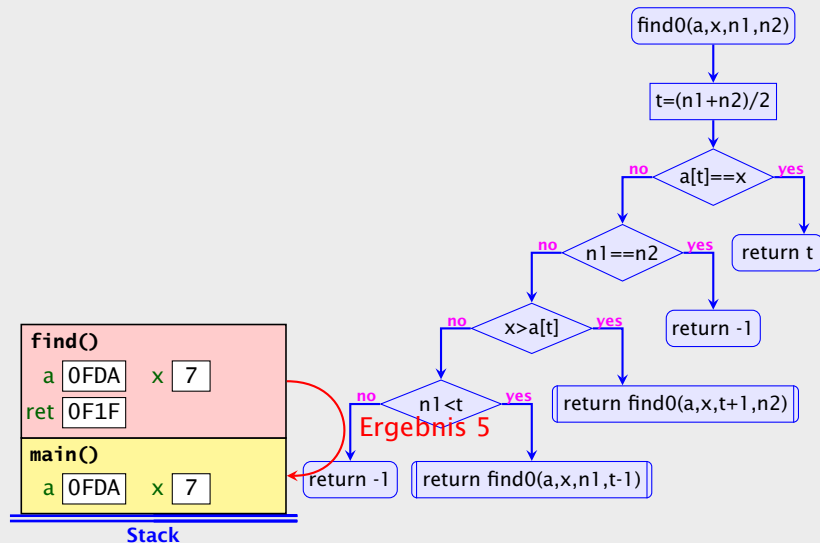
- ▶ Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert **direkt** das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- ▶ Solche Rekursion heißt **End-** oder **Tail-Rekursion**.
- ▶ End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden. . .
- ▶ **Idee:** lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern **ersetze** den bereits dort liegenden Aufruf!

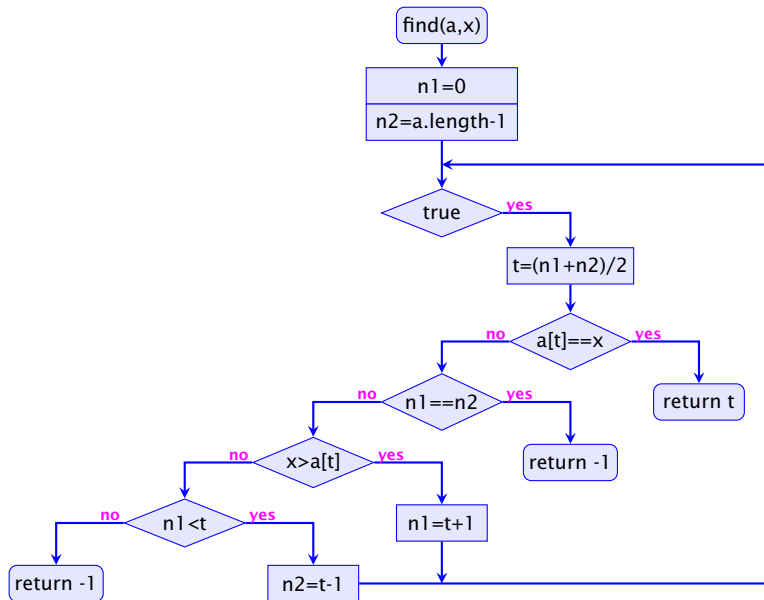
Endrekursion

Endrekursion kann durch **Iteration** ersetzt werden...

```
1 public static int find(int[] a, int x) {
2     int n1 = 0;
3     int n2 = a.length-1;
4     while (true) {
5         int t = (n2 + n1) / 2;
6         if (x == a[t]) return t;
7         else if (n1 == n2) return -1;
8         else if (x > a[t]) n1 = t+1;
9         else if (n1 < t) n2 = t-1;
10        else return -1;
11    } // end of while
12 } // end of find
```

Verbesserte Ausführung





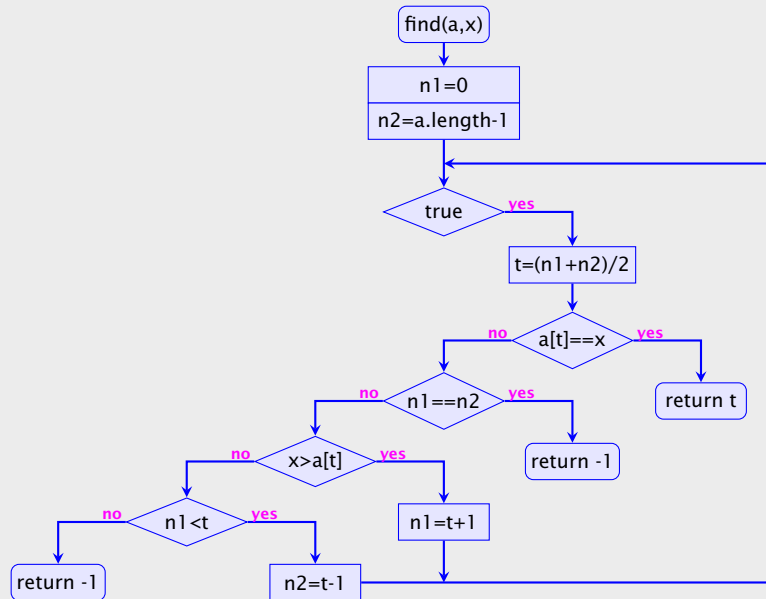
Endrekursion kann durch **Iteration** ersetzt werden...

```
1 public static int find(int[] a, int x) {
2     int n1 = 0;
3     int n2 = a.length-1;
4     while (true) {
5         int t = (n2 + n1) / 2;
6         if (x == a[t]) return t;
7         else if (n1 == n2) return -1;
8         else if (x > a[t]) n1 = t+1;
9         else if (n1 < t) n2 = t-1;
10        else return -1;
11    } // end of while
12 } // end of find
```

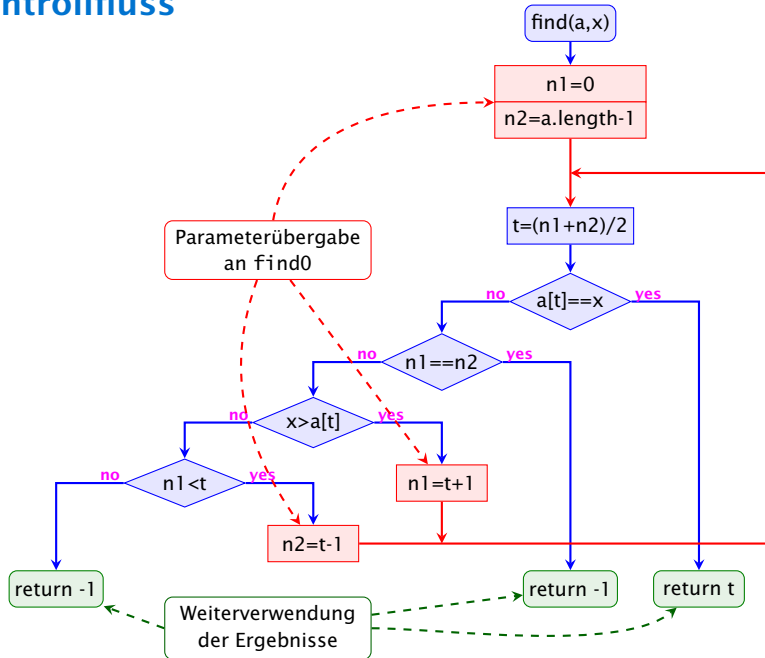
Verlassen von Schleifen

- ▶ Die Schleife wird hier alleine durch die **return**-Anweisungen verlassen.
- ▶ Offenbar machen Schleifen mit **mehreren** Ausgängen Sinn.
- ▶ Um eine Schleife zu verlassen, ohne gleich ans Ende der Funktion zu springen, kann man das **break**-Statement benutzen.
- ▶ Der Aufruf der endrekursiven Funktion wird ersetzt durch:
 1. Code zur Parameter-Übergabe;
 2. einen **Sprung** an den Anfang des Rumpfs.

Kontrollfluss



Kontrollfluss



Verlassen von Schleifen

- ▶ Die Schleife wird hier alleine durch die `return`-Anweisungen verlassen.
- ▶ Offenbar machen Schleifen mit **mehreren** Ausgängen Sinn.
- ▶ Um eine Schleife zu verlassen, ohne gleich ans Ende der Funktion zu springen, kann man das `break`-Statement benutzen.
- ▶ Der Aufruf der endrekursiven Funktion wird ersetzt durch:
 1. Code zur Parameter-Übergabe;
 2. einen **Sprung** an den Anfang des Rumpfs.

Bemerkung

- ▶ Jede Rekursion lässt sich beseitigen, indem man den Aufruf-Keller **explizit** verwaltet.
- ▶ Nur im Falle von Endrekursion kann man auf den Keller verzichten.
- ▶ Rekursion ist trotzdem nützlich, weil rekursive Programme oft **leichter zu verstehen** sind als äquivalente Programme ohne Rekursion. . .

